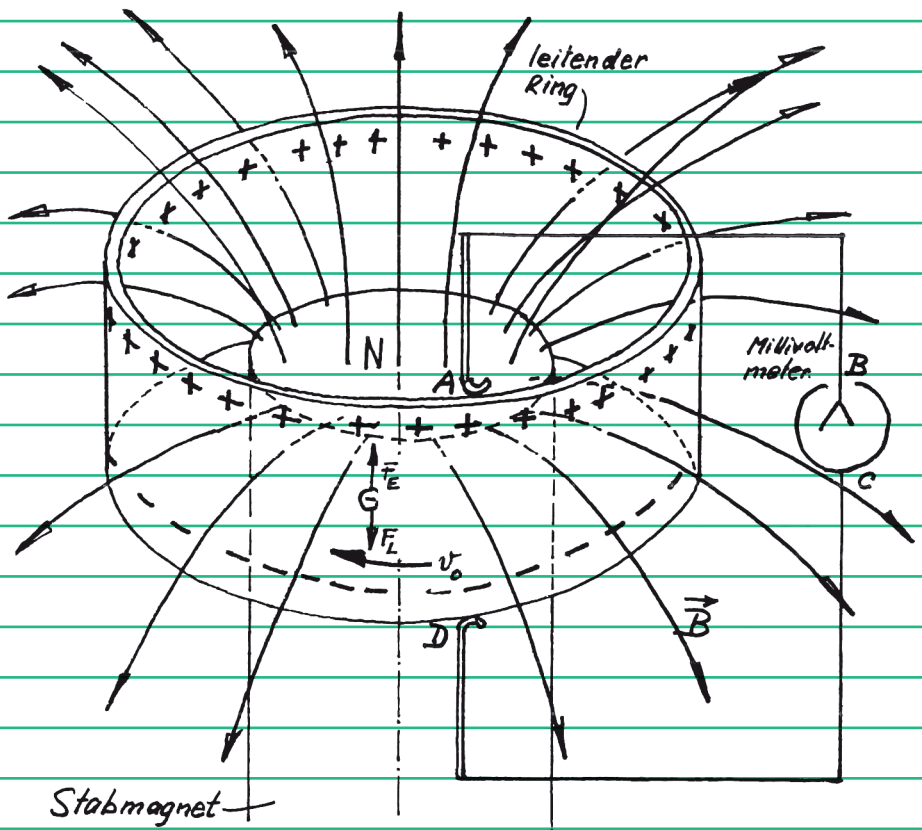


Werner Känzig

Elektrizität und Magnetismus

Physik II 1. Teil



Physik II

1. Teil

Elektrizität und Magnetismus

Erster Teil der Vorlesung "Physik II" gehalten im

Wintersemester 1977/78 an der

Abteilung für Mathematik und Physik

der

Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

von

Werner Känzig

Professor für Experimentalphysik

This work is licensed under
a creative commons license.



2., durchgesehene Auflage 1983
3., durchgesehene Auflage 1986
4., durchgesehene Auflage 1991
5., durchgesehene Auflage 1995

© 1978

vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

ISBN 3-7281-2283-1 (Printausgabe)
ISBN 978-3-7281-3680-0 (open access)
DOI 10.3218/3680-0

Umschlag: Fred Gächter, Grafiker ASG, Obereggen
Druck: Schuler AG, Biel

Vorwort

Das vorliegende Manuskript Physik II/1, "Elektrizität und Magnetismus" ist der erste Teil der zweiten Vorlesung aus einem dreisemestrigen Kurs, Physik I, II, III, der vom Verfasser für die Studenten der Abteilung für Mathematik und Physik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich gehalten wurde. Die Manuskripte dieses Kurses, wie er vom Verfasser das achte (und letzte) Mal gehalten wurde, sind alle im Verlag der Fachvereine erschienen. Sie berücksichtigen die Prüfungserfahrungen und die gescheiterten Fragen der Studenten aus sieben Jahrgängen.

Physik I : "Mechanik und Wellenlehre" (Sommersemester 1977)

Physik II/1 : "Elektrizität und Magnetismus" } (Wintersemester 1977/78)

Physik II/2 : "Wärmelehre"

Physik III : "Quantenphysik" (Sommersemester 1978)

Jedes Manuskript ist aufgebaut auf den vorhergehenden Manuskripten und nimmt darauf Bezug. Dieser Kurs ist nicht konzipiert als Übersicht über die Physik, als Nachschlagewerk, als Formelsammlung oder als Repetitorium. Diese Vorlesungen sollen allein zur Einarbeitung eines ersten Verständnisses der Physik dienen. Viele Problemkreise werden nur an Beispielen behandelt und nicht in voller Allgemeinheit. Auf Anschaulichkeit wird grosser Wert gelegt. Demonstrationsexperimente sind ein wesentlicher Bestandteil dieser Vorlesungen, obwohl sie im Manuskript nur spärlich erwähnt und noch seltener beschrieben sind.

Manche Abschnitte zielen darauf ab, beim ernsthaften Studenten intellektuelles Unbehagen hervorzurufen, um ihm bewusst zu machen, dass das hier angebotene Verständnis der Physik (und wahrscheinlich jedes Verständnis) provisorisch ist, und um das Bedürfnis nach einem tieferen Verständnis zu wecken. Gelegentlich wird auch das naive Falsche dem Richtigen gegenübergestellt.

Die Konzeption dieses Physikkurses fusst auf der alten Zürcher Tradition der anschaulichen Demonstrationsvorlesungen, die auf P. Debye und P. Scherer zurückgeht. Es darf aber nicht geleugnet werden, dass sie stark beeinflusst wurde von den unvergleichlichen "Feynman Lectures", dem "Berkeley Physics Course" und von den Vorlesungen von Benedek und Villars am M.I.T., "Physics, with illustrative examples from medicine and biology". Diese Bücher werden dem interessierten Studenten als ergänzende und vertiefende Lektüre ganz besonders empfohlen.

Selbstverständlich gehört eine grosse Sammlung von Übungsaufgaben zu diesem Kurs. Sie wurde den Manuskripten nicht einverleibt, um die Schulmeisterei in Grenzen zu halten.

Der Verfasser weiss sehr wohl, wie problematisch es ist, eine solche Einführung in die Physik im Alleingang zu konzipieren. Sicher enthält sie viele Fehler trotz dem "feedback" von sieben Studentenjahrgängen. Dafür ist der Kurs "aus einem Guss". Diese Manuskripte wurden nur deshalb publiziert, weil es die Studenten wünschten.

W.K.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>1. Elektrostatik.</u>	1
1.1. Der Begriff der elektrischen Ladung	1
1.2. Masssysteme	7
1.2.1. Historische Bemerkungen	7
1.2.2. Das heutige internationale Masssystem SI	11
1.3. Das Coulomb'sche Gesetz	14
1.4. Das elektrische Feld \vec{E} und das elektrostatische Potential V	16
1.5. Der Feldfluss und der Satz von Gauss	20
1.6. Feldlinien und Äquipotentialflächen	29
1.7. Die Gleichung von Laplace	30
1.8. Die Gleichung von Poisson	35
1.9. Der Kondensator und der Begriff der Kapazität	38
1.10. Die elektrostatische Energie	43
1.10.1. Der Satz der elektrostatischen Energie	43
1.10.2. Die Energiedichte des elektrischen Feldes	44
1.11. Nichtleitende Materie im elektrischen Feld	48
1.11.1. Demonstrationsexperimente zur Einleitung	48
1.11.2. Induzierte elektrische Dipole	48
1.11.3. Permanente elektrische Dipole	50
1.11.4. Die dielektrische Polarisation	52
1.11.5. Phänomenologische Charakterisierung des dielektrischen Materials	55
1.11.6. Der Satz von Gauss im Dielektrikum	58
1.11.7. Energiebetrachtungen	62
1.11.8. Elektrostatische Kräfte zwischen geladenen Körpern im Dielektrikum	64
1.11.9. Bedingungen an Grenzflächen	67

2. Der elektrische Strom

71

2.1. Die einfachsten Modellvorstellungen

71

2.1.1. Der Strom als bewegte Ladung

71

2.1.2. Der Strom bei vielen bewegten Ladungsträgern

73

2.1.3. Ionenleitung in Elektrolyten

75

2.1.4. Das Gas-Modell eines Leiters

80

2.2. Phänomenologische Beziehungen

82

2.2.1. Der Widerstand R und der spezifische Widerstand ρ

82

2.2.2. Die Joule'sche Wärme

84

2.3. Bemerkungen zur Leitfähigkeit der Metalle

84

2.4. Das Stromdichtefeld und die Kontinuitätsgleichung

85

2.4.1. Das Stromdichtefeld im stationären Zustand

85

2.4.2. Das stationäre Stromdichtefeld bei nicht-Ohm'schem
Ladungstransport

88

2.4.3. Nichtstationäre Ströme

90

2.4.4. Der Polarisationsstrom im Dielektrikum

91

2.4.5. Das RC-Glied als Schaltelement

92

3. Das Magnetfeld stationärer Ströme

94

3.1. Die Kraftwirkung zwischen Strömen

94

3.2. Die Lorentz-Kraft und das Feld \vec{B}

95

3.3. Ströme als Erzeuger des Feldes \vec{B}

98

3.3.1. Das Feld \vec{B} des unendlich langen, geraden Leiters

98

3.3.2. Das Zirkulationsintegral der magnetischen Induktion

101

3.3.3. Anwendung des Zirkulationsintegrals bei der
Berechnung des Feldes \vec{B}

102

3.3.4. Der Zusammenhang zwischen den Vektorfeldern \vec{E} und \vec{B}

104

3.3.5. Das Vektorpotential \vec{A}

106

	<u>V</u>
<u>4. Die Lorentz - Kraft</u>	110
4.1. Die Relativität elektrischer und magnetischer Felder	110
4.2. Ein einfaches Experiment zur Relativität elektrischer und magnetischer Felder	114
4.3. Die Unipolarmaschine	116
4.4. Freie Elektronen im homogenen Felde \vec{B}	122
4.5. Die Übertragung der Lorentz-Kraft auf das Leitermaterial	125
4.5.1. Die Biot - Savart - Kraft	125
4.5.2. Übertragung der Lorentz - Kraft bei zwei- und dreidimensionalen Leitern	126
4.5.3. Der Hall - Effekt	128
<u>5. Die Magnetisierung der Materie</u>	130
5.1. Der Begriff des magnetischen Momentes	130
5.2. Magnetische Momente von Atomen und anderen Teilchen	132
5.3. Die Definition der Magnetisierung	134
5.4. Phänomenologische Betrachtung der Magnetisierung und der Molekularströme	134
5.5. Das Feld \vec{H} als phänomenologische Rechnungsgröße	137
5.6. Das Beispiel des permanenten Magneten	139
5.7. Die Charakterisierung magnetischer Materialien	141
5.7.1. Ferromagnetische Materialien	141
5.7.2. Nicht-ferromagnetische Materialien	143
5.8. Bedingungen an Grenzflächen	145
<u>6. Das Induktionsgesetz von Faraday</u>	149
6.1. Eine experimentelle Tatsache und ihre Deutungen	149

6.1.1. Der Induktionsstrom im geschlossenen Leiterkreis	149
6.1.2. Induktionsgesetz und Lorentz-Kraft	154
6.2. Induktionsgesetz und Energieerhaltung	156
6.3. Fälle, bei denen die Integralform des Induktionsgesetzes nicht anwendbar ist.	158
6.4. Wirbelströme	160
6.5. Gegenseitige Induktion und Selbstinduktion	161
6.5.1. Die gegenseitige Induktion von Leiterschleifen	161
6.5.2. Der Koeffizient der Selbstinduktion	166
6.5.3. Die Selbstinduktion von Leitungen	170
6.5.4. Ein- und Ausschalten einer Selbstinduktion	172
6.6. Energiebetrachtungen	174
6.6.1. Die Energiedichte des magnetischen Feldes	174
6.6.2. Die Energie eines Systems von zwei Leiterschleifen	177
<u>7. Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom</u>	177
7.1. Die Symmetrie der Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{B} im Vakuum	177
7.2. Die Rotation der Felder \vec{B} und \vec{H} im allgemeinen Fall	179
<u>8. Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen</u>	180
<u>9. Aus der Technik der Wechselströme</u>	181
9.1. Die komplexe Schreibweise	181
9.2. Der Bereich der Anwendbarkeit der komplexen Schreibweise	192
9.3. Die Leistung eines Wechselstromes	193
9.4. Der Transformator	194
9.5. Resonanz und Schwingkreise	198
9.5.1. Serie-Resonanzkreis im eingeschwungenen Zustand	198

9.5.2. Der frei schwingende RCL-Seriekreis	204
9.5.3. Der Q-Faktor des RCL-Seriekreises	205
9.5.4. Die Erzeugung von ungedämpften Schwingungen	206
9.5.5. Gekoppelte Schwingkreise	208

<u>10. Elektromagnetische Wellen</u>	212
10.1. Wellenfortpflanzung längs einer Doppelleitung	213
10.2. Die Impedanz einer Doppelleitung	218
10.2.1. Die unendlich lange Doppelleitung	218
10.2.2. Die Doppelleitung endlicher Länge	221
10.3. Wellenausbreitung im freien Raum	223
10.3.1. Demonstrationsexperiment zur Einleitung	223
10.3.2. Der Zusammenhang zwischen den Maxwell'schen Gleichungen und der Wellengleichung	224
10.3.3. Die ebene, laufende elektromagnetische Welle im nichtleitenden Medium	231
10.4. Der Energietransport in der elektromagnetischen Welle und der Poynting'sche Vektor	236
10.5. Das Problem der Abstrahlung: Der Hertz'sche Dipol	241
10.5.1. Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch einen oszillierenden elektrischen Dipol im Vakuum	241
10.5.2. Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch einen oszillierenden magnetischen Dipol im Vakuum	247
10.5.3. Die Streuung elektromagnetischer Wellen	248
<u>Nachwort</u>	253

1. Elektrostatik

1.1. Der Begriff der elektrischen Ladung

Konventionsgemäss wird die Formulierung der Gesetze der Mechanik auf den drei Grundbegriffen "Länge", "Zeit" und "Masse" aufgebaut. Man ordnet diesen Grundbegriffen "Dimensionen" zu: Wenn wir im physikalischen Raume Geometrie treiben, brauchen wir drei "Längendimensionen", wenn wir Kinematik treiben wollen, müssen wir die Dimension "Zeit" hinzunehmen, und wenn wir physikalische Dynamik treiben wollen, kommt noch die Dimension "Masse" hinzu. Es ist dann überflüssig, auch noch der Kraft eine eigene Dimension zu geben (Physik I S. 20/21).

Die fundamentalen Dimensionen Länge, Zeit und Masse reichen nicht aus, sobald man elektrische und magnetische Phänomene betrachtet. Hier muss man einen neuen Grundbegriff bzw. eine neue Dimension hinzunehmen. Es ist zweckmässig und philosophisch befriedigend, als neuen Grundbegriff die "elektrische Ladung" einzuführen. Ladung ist so grundlegend wie Länge, Zeit

und Masse. Der Philosoph mag fragen, was "Ladung an sich" sei. Für den Physiker jedoch ist die Ladung definiert durch die Erscheinungen, die sie hervorruft, durch Erhaltungssätze und Symmetrien. Die Begriffe "elektrisches Feld", "Strom", "Magnetfeld" können vom Grundbegriff der "Ladung" abgeleitet werden unter Benützung der Begriffe "Länge", "Zeit" und "Masse". So ist z.B. Strom im wesentlichen bewegte Ladung, und Strom erzeugt ein magnetisches Feld.

Einige fundamentale Tatsachen.

a. Positive und negative Ladung

Schon um 1733 herum bemerkte Du Fay, dass sich geladene Körper entweder anziehen oder abstoßen. Er schloss daraus, dass es zwei Sorten von Elektrizität gebe: Ein mit einem Katzenfell geriebener Harzstab trägt eine andere Sorte von Elektrizität als ein mit einem amalgamierten Leder geriebener Glasstab. Er sprach von "Harzelektrizität" und von "Glaselektrizität" und gelangte zur folgenden Erkenntnis:

"Ladungen, die zur gleichen Sorte gehören stoßen sich ab, und Ladungen, die zu verschiedenen Sorten gehören ziehen sich an."

Mehr als zwei Sorten lassen sich nicht ableiten aus diesen qualitativen Beobachtungen. Du Fay's "Glaselektrizität" wird heute positive Elektrizität und seine "Harzelektrizität" negative Elektrizität genannt. Dies ist eine Konvention.

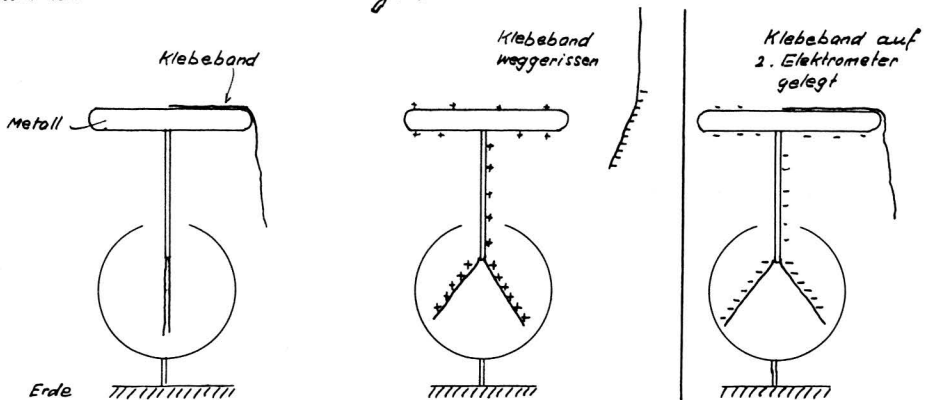
b. Ladungstrennung

Ein "neutraler", d.h. ungeladener erscheinender Körper kann "geladen" werden indem man ihm entweder positive oder negative Ladung entzieht. Man nennt diesen Prozess Ladungstrennung. Nimmt man negative Ladung weg, dann bleibt ein positiv geladener Körper zurück (und umgekehrt). Der Betrag der weggenommenen Ladung

ist gleich dem Betrag der zurückbleibenden Ladung. Es besteht somit eine gewisse Symmetrie zwischen den beiden Sorten: die eine Sorte besteht sozusagen aus der Abwesenheit der anderen Sorte. Man kann auch sagen, dass ein ungeladener Körper gleichviel positive wie negative Ladung enthält.

Demonstrationsexperimente

① Ein Klebeband (Scotch magic No. 810) wird auf eine ungeladene, frisch polierte Messingplatte geklebt, die mit einem Elektrometer verbunden ist. Wenn das Band weggerissen wird, schlägt das Elektrometer aus und zeigt damit an, dass eine Ladung zurückgeblieben ist. Sie ist positiv; denn der Ausschlag des Elektrometers nimmt zu, wenn man ihm einen mit einem amalgamierten Leder geriebenen Glasstab nähert. Auch das weggerissene Klebeband ist geladen, wie man sofort sieht, wenn man es auf die Messingplatte eines zweiten, ursprünglich ungeladenen Elektrometers legt. Die Ladung ist negativ; denn der Ausschlag des zweiten Elektrometers nimmt ab, wenn man ihm den geriebenen Glasstab nähert. Dass die Ladungen der beiden Elektrometer entgegengesetzt gleich sind, erkennt man daran, dass beide Ausschläge auf Null zurückgehen, wenn man eine leitende Verbindung zwischen den beiden Elektrometern herstellt. Unbeantwortet bleibt die Frage: Bleiben beim Wegreißen des Klebebandes Elektronen aus dem Messing daran kleben, oder bleiben am Messing positive Ionen aus der Klebeschicht hängen?



② Aus einem Teflontrichter abtropfendes Wasser ist positiv geladen. Der Trichter lädt sich dabei negativ auf. Offenbar bleiben

OH^- -Ionen am Teflon hängen.

Weitere Beispiele zur Ladungstrennung

Beim Reiben eines Harzstabs mit einem Katzenfell bleiben Elektronen aus den Haaren am Harz kleben. Das Harz lädt sich negativ auf und das Fell positiv. Die Reibung dient nur zur Gewährleistung eines engen Kontaktes an möglichst vielen Stellen.

Wenn man zwei Platten aus verschiedenen Metallen aufeinanderlegt und darauf trennt, dann ist die eine positiv und die andere negativ geladen.

C. Ladungserhaltung

Betrachte ein System, bei dem Materie weder ein- noch austritt. Zu- und Abfuhr von Energie sei aber möglich. Eine Veränderung der Gesamtladung des Systems, der algebraischen Summe der positiven und negativen Ladungen, ist bisher noch nie beobachtet worden. Dies ist das Gesetz der Erhaltung der Ladung.

Ein makroskopisches Beispiel ist das auf S.3 beschriebene Demonstrationsexperiment: Das System bestehend aus Klebeband und Metallstück hat vor und nach dem Wegreißen des Bandes dieselbe Gesamtladung, nämlich null. Mechanische Arbeit ist in das System hineingesteckt worden beim Wegreißen des Bandes. Ein kleiner Bruchteil dieser Arbeit ist zur Ladungstrennung aufgewendet worden. Der Rest ist zum einen Teil in chemischen Veränderung des Klebstoffes gespeichert und zum anderen Teil in Wärme umgewandelt worden.

Paarerzeugung: das obige Beispiel könnte zum Schluss verleiten, dass entgegengesetzt gleiche Ladungen von Körpern oder Teilchen immer davon herrühren, dass bestehende Ladungsträger, z.B. Elektronen, von einem Körper auf den anderen übergehen. Dies ist aber nicht so. Es gibt Prozesse, bei denen zwei entgegengesetzt geladene Elementarteilchen neu entstehen. Ein Bei-

spiel für einen solchen Prozess ist die Paarerzeugung. Ein Photon (ein Quantum elektromagnetischer Strahlung), dessen Energie W den kritischen Wert $W_0 = 1.02 \times 10^6$ Elektronvolt überschreitet, kann im elektrischen Felde eines Atomkerns annihiliert werden. Dabei werden zwei entgegengesetzt gleich geladene Elementarteilchen erzeugt, deren Massen gleich sind, nämlich ein Elektron und sein Antiteilchen, ein Positron. Die Energie W_0 ist gleich der Ruheenergie der beiden Teilchen zusammen, d.h. $W_0 = 2m_0c^2$ (Physik I S. 320). Der Energieüberschuss $W - W_0$ findet sich in der kinetischen Energie der beiden Teilchen wieder. Die Gesamtladung des Systems hat sich dabei nicht geändert. Sie ist gleich der (unveränderten) Ladung des Atomkerns. Man hat bisher keinen Grund anzunehmen, dass Elektron und Positron nicht an derselben Stelle entstehen. Man sagt: Die Ladungserhaltung ist lokal. Wenn es nicht allgemein so wäre, käme das Gebäude der Physik sehr ins Wanken. Ladungsänderungen an einem Ort können also nur durch Transport von Ladung erfolgen. Da es keine masselosen geladenen Teilchen gibt, ist der Ladungstransport auch immer mit einem Massetransport verbunden.

Ladung und Masse sind aber gänzlich verschiedene Dinge, obwohl Ladung nie ohne Masse vorkommt. Die Masse hängt vom Bezugssystem ab, d.h. von der Geschwindigkeit: Sie ist "relativistisch nicht invariant". Bei einer Kraft in Richtung der Relativbewegung ist die Masse $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ massgebend (Physik I, S. 319). Man kann deshalb nicht von Erhaltung der Masse sprechen. Im Beispiel der Paarerzeugung entsteht Masse. Im Gegensatz dazu ist die Ladung relativistisch invariant. Ein Elektron z.B. hat immer dieselbe Ladung, gleichgültig wie schnell es läuft.

d. Die Elementarladung.

Die Ladung des Elektrons ist $-e$, die Ladung des Positrons $+e$. Die Ladung des 1836 mal schwereren Protons ist ebenfalls $+e$. Es sind Experimente gemacht worden, die eine Ungleichheit

im Betrag der Ladung von Elektron und Proton von $10^{-20}e$ noch angezeigt hätten. Sie sind negativ verlaufen.

Man hat bis heute (20. Oktober 1977) keine ernstzunehmende experimentelle Evidenz dafür, dass es Körper oder Teilchen gibt, deren Ladung nicht ein ganzzahliges Vielfaches der Ladung e ist. Die Ladung e wird Elementarladung genannt. Der Anstoß zu den neuesten Experimenten ging von der Theorie aus: Um den "Zoo" der vielen Elementarteilchen (Elektron, Proton, Neutron, Neutrino, K^- , π^- , Λ -Teilchen ... und die entsprechenden Antiteilchen) zu verstehen, haben die Theoretiker ein mathematisches Modell geschaffen, das sog. Quark-Modell. Hier kommen mathematische Strukturen vor, die als Teilchen interpretiert werden müssen, deren Ladung ein Bruchteil ($1/3$) der Elementarladung ist. Das sind die Quarks. Das Quark-Modell ist ein Fortschritt auf dem Wege zum Verständnis der Elementarteilchen. Es scheint, dass ein einzelnes Quark mit der Ladung $\frac{e}{3}$ nicht direkt beobachtbar ist.

Aus historischer Sicht wäre man geneigt, folgende Parallele zu ziehen: Das Positron wurde um 1928 von Dirac vorausgesagt, und zwar basierte die Voraussage auch auf einer mathematischen Struktur, der Dirac-Gleichung. Der erste anerkannte experimentelle Nachweis durch Anderson erfolgte erst 1932. Auch das Antiproton wurde erst nach seiner Voraussage entdeckt.

Es könnte aber auch sein, dass sich der Januskopf der Physik (vgl. Physik I, S. 3) beim Quarkproblem von der folgenden Seite zeigt: Die Existenz einer mathematischen Struktur in der theoretischen Physik impliziert nicht notwendigerweise eine entsprechende physikalische Existenz. Folgendes (hinkende) Beispiel diene als Metaphor: Die Planetenbahnen sind Ellipsen in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Der zweite Brennpunkt ist eine mathematische Konstruktion. Physikalisch findet man dort nichts.

1.2. Masssysteme

1.2.1. Historische Bemerkungen.

das heute gesetzlich anerkannte Masssystem, das "Système International" (im folgenden als SI abgekürzt) ist letztendlich aus dem c.g.s. - System hervorgegangen, allerdings nach gewissen Änderungen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. Die Zusammenhänge seien auf vereinfachte Weise erläutert.

das absolute elektrostatische c.g.s.-System (electrostatic units, e.s.u.)

In vielen Arbeiten, insbesondere auf dem Gebiete der Atomphysik wird heute noch das absolute elektrostatische Masssystem verwendet. Die Grundeinheiten sind Zentimeter (cm), Gramm (g) und Sekunde (sec). Die Ladungseinheit wurde früher "absolute elektrostatische c.g.s. Ladungseinheit" genannt. In der angelsächsischen Literatur spricht man von "electrostatic units" (abgekürzt e.s.u.), wenn in diesem System gerechnet wird; und die Ladungseinheit heisst statcoulomb (abgekürzt statcoulb). Diese Ladungseinheit wird mit Hilfe des Coulomb'schen Gesetzes definiert: Die Kraft, die zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r aufeinander ausüben, wurde ursprünglich geschrieben als

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

wobei F in $\text{dyn} = \text{g cm/sec}^2$ (vgl. Physik I S. 19) und r in cm zu messen sind. Da keine Koeffizienten vorkommen, ist die Ladungseinheit definiert. Die Dimension der Ladung ergibt sich aus der Gleichung zu $[Q] = (\text{dyn cm}^2)^{1/2} = \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{sec}^{-1}$. Formell ist dieses Vorgehen nicht falsch und auch nicht unpraktisch. Physikalisch mag es unbefriedigend sein, weil dem fundamentalen neuen Begriff der Ladung keine eigene neue Dimension zukommt (vgl. S. 1). Sobald man die Ladung als neue Dimension betrachtet, deren Einheit das statcoulomb ist, muss das Coulomb'sche Gesetz in der folgenden Form geschrieben werden:

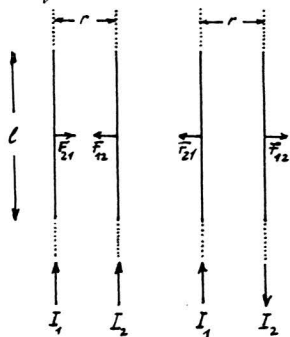
$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

wobei die Konstante k die Dimension $[k] = \frac{\text{dyn cm}^2}{\text{statc}^2} = \frac{g \text{ cm}^3}{\text{sec}^2 \text{ statc}^2}$ und den Zahlwert 1 hat. Allgemeinem Gebrauche folgend werden wir die Konstante k nicht hinschreiben, wenn wir in e.s.u. rechnen.

Mit der Ladungseinheit ist auch die Stromeinheit definiert: Wenn durch irgend eine Querschnittsfläche pro sec I absolute elektrostatische Ladungseinheiten, Statcoulombs, hindurch treten, entspricht dies einem Strom von I absoluten elektrostatischen Stromeinheiten, Statampères: $1 \text{ Statampère} = 1 \text{ Statcoulomb/sec}$.

Das absolute elektromagnetische c.g.s.-System (electromagnetic units e.m.u.)

Auch dieses System basiert auf den Grundeinheiten cm, g und sec. Primär wird aber nicht eine Ladungseinheit definiert, sondern eine Einheit des Stromes, und zwar ausgehend von der elektromagnetischen Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern. Betrachte zwei lange, gerade, parallele Drähte, die von Strömen der Stärke I_1 und I_2 durchflossen werden. Die beiden Leiter seien ungeladen, d.h. es sollen keine Coulombkräfte wirken. Je nach-



dem die beiden Leiter in gleicher oder entgegengesetzter Richtung vom Strom durchflossen werden, ziehen sie sich an oder stoßen sie sich ab, wobei nach dem dritten Newton'schen Gesetz $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (vgl. Physik I, S. 13/14). Der Betrag F der Kraft, die auf ein Leiterstück der Länge l wirkt, ist proportional zu $l I_1 I_2 / r$, wobei r der Abstand der (als sehr dünn zu betrachtenden) Drähte ist. Zur Definition der Einheit der Stromstärke schreibt man

$$F = \frac{2l}{r} I_1 I_2$$

und misst F wieder in dyn und r in cm. Man kann sich auf den Standpunkt stellen, dass in dieser Definitionsgleichung ebenso wenig Will-

hier stecke wie in der Definitionsgleichung des Statcoulomb (S.7). Den Faktor 2 könnte man damit begründen, dass beide Leiter zum System gehören. Die so definierte Stromstärkeinheit wurde "absolute elektromagnetische c.g.s. Stromstärkeinheit" genannt. Da niemand mehr in diesem Masssystem rechnet, hat sich keine Abkürzung eingebürgert. Analog zum Statampère könnte man sie Magampère nennen. Die "absolute elektromagnetische c.g.s. Ladungseinheit", die wir hier Magcoulomb nennen, ist wie folgt definiert: Wenn durch irgend eine Querschnittsfläche eine Sekunde lang ein Strom von 1 Magampère fließt, dann beträgt die hindurchgetretene Ladung 1 Magcoulomb:

$$1 \text{ Magcoulomb} = 1 \text{ Magampèresekunde. (der Zusammenhang ist genau derselbe wie zwischen Statcoulomb und Statampère).}$$

der Zusammenhang zwischen e.s.u. und e.m.u.

Sowohl die Definition des Statcoulomb, als auch diejenige des Magcoulomb fassen auf fundamentalen Naturgesetzen. Da die Definitionsgleichungen keine willkürlichen Faktoren enthalten, und in beiden Fällen dieselben cm, g und sec verwendet werden, können sich Statcoulomb und Magcoulomb nicht um einen physikalisch bedeutungslosen Umrechnungsfaktor unterscheiden, wenn sie überhaupt verschieden sind. Eine Dimensionsbetrachtung zeigt sofort, dass sie verschieden sein müssen:

Dem Statcoulomb kann man nach S.7 formal die Dimension $\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$ zuordnen. Aus der Definition des Magampère auf S.8 folgt formal die Dimension $\text{dyn}^{1/2}$ für das Magampère. Das Magcoulomb hat damit die Dimension $\text{dyn}^{1/2} \text{sec}$. Der Quotient der Dimensionen $\frac{[\text{Statcoulomb}]}{[\text{Magcoulomb}]}$ hat damit die Dimension $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, d.h. die Dimension einer Geschwindigkeit. Beachte, dass es sich hier nicht um das Verhältnis zweier Ladungen handelt, sondern um den Quotienten zweier Dimensionen. Das Verhältnis der Ladungen selber muss also etwas zu tun haben mit der Masszahl einer Naturkonstanten, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass es das Verhältnis der Ladungen $\frac{1 \text{ Magcoulomb}}{1 \text{ Statcoulomb}}$ ist, welches gleich der Masszahl dieser Na-

konstanten sein muss. Dies war schon um die Mitte des 19. Jahrhunderts bekannt. Wilhelm Weber stellte um 1852 herum auf experimentellem Wege fest, dass das Verhältnis der Ladungen mit der Masszahl der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum übereinstimmte: das Magacoulomb ist eine rund $3 \cdot 10^{10}$ mal grössere Ladung als das Statcoulomb! Für eine gegebene Ladungsmenge gilt damit:

$$\frac{\text{Masszahl in Statcoulomb}}{\text{Masszahl in Magacoulomb}} = \text{Masszahl der Vakuumlichtgeschwindigkeit in } \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

Die genaue Masszahl der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist

$$c = 2,99\,792\,458 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$$

James Clark-Maxwell zeigte um 1865 herum auf rein theoretischem Wege, dass

$$\frac{\text{Masszahl in Statcoulomb}}{\text{Masszahl in Magacoulomb}} = \text{Masszahl der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum in cm/sec.}$$

Daraus konnte man schliessen, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Es steckt keinerlei Zahlenmystik in diesem Verhältnis. In einem späteren Kapitel werden wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen berechnen!

Der Irrweg zum alten internationalen Ampère bzw. Coulomb.

Vor 1881 waren bei den Physikern nur das absolute elektrostatische und das absolute elektromagnetische c.g.s.-System in Gebrauch. Auf einem internationalen Kongress über Masssysteme im Jahre 1881 fand man aber, dass die absolute elektromagnetische Stromstärkeinheit (in dieser Vorlesung Magampère genannt) unbequem gross sei, da die damals in den Laboratorien verwendeten Stromquellen (galvanische Batterien) nicht ein Magampère liefern konnten über längere Zeit. Man definierte dann eine neue Stromstärkeinheit, das Ampère, durch die Beziehung

$$1 \text{ Ampère} = \frac{1}{10} \text{ Magampère}$$

und entsprechend eine neue Ladungseinheit, das Coulomb, die Ampèrsekunde. Es ist also

$$1 \text{ Coulomb} = \frac{1}{10} \text{ Magacoulomb}$$

das wäre alles nicht so schlimm gewesen, wenn man nicht später ein internationales Ampère definiert hätte durch die in einer Elektrolyse ausgeschiedene Silbermenge. Ursprünglich wollte man natürlich das internationale Ampère gleich $\frac{1}{10}$ Magampère haben, doch die Tücken des Experimentes sorgten dann dafür, dass das internationale Ampère davon abwich. Die daraus entstehenden Konfusionen haben manchen Physiker, die sich mit Präzisionsmessungen befassten, Kopfbrechen gemacht.

1.2.2. das heutige internationale Masssystem SI.

Die Definition des Ampère

Dem heutigen internationalen Masssystem liegen die Einheiten Meter (m), Kilogramm (kg), Sekunde (sec) zu Grunde. Die Einheit der Kraft ist damit das Newton (Physik I S. 19). Die Einheit der Stromstärke, das Ampère, ist durch die Beziehung

$$1 \text{ Ampère} = \frac{1}{10} \text{ Magampère}$$

an das absolute elektromagnetische c.g.s. System angeschlossen, wie es im Jahre 1881 ursprünglich beabsichtigt wurde. Das durch die abgeschiedene Silbermenge definierte alte internationale Ampère ist begraben. Die Formel für die Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern lässt sich nun leicht auf SI umrechnen. Dazu muss man sich bewusst sein, dass man für die Symbole in einer Formel immer Masszahlen einsetzt. So ist auf S. 8 für den Strom I dessen Masszahl in Magampère und für die Kraft F deren Masszahl in Newton einzusetzen. Misst man die Ströme I_1 und I_2 in Ampère statt in Magampère, dann sind die entsprechenden Masszahlen 10-mal grösser. Wenn man F weiterhin in dyn messen würde, müsste die Formel lauten $F = 10^{-2} \frac{2\ell}{r} I_1 I_2$. (Die Längeneinheit geht nicht ein, da nur das Verhältnis der Längen ℓ und r vorkommt). Misst man nun

F in Newton statt in dyn, dann muss die Masszahl 10^5 mal kleiner herauskommen, weil das Newton eine 10^5 mal grössere Krafteinheit ist. Im heutigen internationalen System ist also

$$F = 10^{-7} \cdot \frac{2\ell}{r} I_1 I_2 \quad \text{SI}$$

Man kann dies als Definitionsgleichung des Ampère betrachten. Das Coulomb, als Ampèrsekunde, ist damit auch definiert.

Anmerkung

Das alte internationale Ampère, das nicht genau $\frac{1}{10}$ Magampère war, war im Grunde genommen ein willkürliches Mass. Demgemäss musste die obige Formel einen konstanten Faktor enthalten, der nur empirisch bestimmt werden konnte. Man mass den Strom nach der Vorschrift über das elektrolytisch abgeschiedene Silber und die Kraft im wohldefinierten Newtons. Aus Gründen, die wir erst bei der Behandlung des Induktionsgesetzes verstehen werden, schrieb man

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\ell}{r} I_1 I_2$$

und betrachtete μ_0 als empirisch zu bestimmende Konstante. Im heutigen internationalen System ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$. Diese Konstante ist nicht dimensionslos, da man dem Strom (oder der Ladung) eine neue Grunddimension zugeordnet hat. Auch in SI-Einheiten schreibt man heute noch

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\ell}{r} I_1 I_2, \text{ wobei } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Newton}}{\text{Ampère}^2} \quad \text{SI}$$

die Konstante μ_0 wird als Induktionskonstante bezeichnet.

Das Coulomb'sche Gesetz in SI-Einheiten.

Wir gehen aus von einer physikalisch vorgegebenen Situation z.B. einem Proton und einem Elektron im Abstand, der z.B. gleich einer Daumenbreite sein soll. Im absoluten elektrostatischen c.g.s.-System ist der Betrag der Kraftwirkung gegeben durch $F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. F ist die Masszahl der Kraft in dyn, Q die Masszahl der Ladung in Statcoulomb und r die Masszahl des

Abstandes in cm. Die Definition des SI-Ampère auf S. 11 impliziert auch, dass

$$1 \text{ Coulomb} = \frac{1}{10} \text{ Magcoulomb}, \text{ und damit nach S. 10}$$

$$\frac{\text{Masszahl in Statcoulomb}}{\text{Masszahl in Coulomb}} = \frac{1}{10} \text{ Masszahl der Lichtgeschwindigkeit in } \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 3 \cdot 10^9.$$

Werden die Ladungen in Coulomb gemessen statt in Statcoulomb, so wird die Masszahl des Produktes $Q_1 Q_2$ $(3 \cdot 10^9)^2$ mal kleiner. Die Kraft in dyn bleibt dieselbe, denn vorgegeben ist die physikalische Situation. Wenn F weiterhin in dyn und r in cm gemessen würde, müsste man schreiben $F = (3 \cdot 10^9)^2 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Misst man nun noch r in Metern statt in cm wird die Masszahl des Abstandsquadrates r^2 10^4 mal kleiner. Für die Kraft in dyn müsste man also schreiben $F = 10^{-4} (3 \cdot 10^9)^2 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Im SI soll aber die Kraft F nicht in dyn, sondern in der 10^5 mal grösseren Krafteinheit Newton gemessen werden (Physik I, S. 19). Die Masszahl von F wird damit um den Faktor 10^5 kleiner, sodass $F = 10^{-5} \cdot 10^{-4} (3 \cdot 10^9)^2 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Bezeichnen wir die Masszahl der Lichtgeschwindigkeit in m/sec mit c ($c = 3 \cdot 10^8$), so wird betragsmässig

$$F = 10^{-9} c^2 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{SI}$$

In der Zeit des alten internationalen Ampère bzw. Coulomb hatte sich folgende Schreibweise eingebürgert

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Diese Schreibweise ist im SI übernommen worden. Betragsmässig gilt also im SI

$$\epsilon_0 = \frac{10^9}{4\pi c^2} = 8,85419 \times 10^{-12}$$

Die Dimension von ϵ_0 ist $[\epsilon_0] = \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton m}^2}$. Die Konstante ϵ_0 wird Influenzkonstante genannt. Im Gegensatz zur Induktionskonstante μ_0 , die ein reiner Definitionsfaktor ist, kann die Influenzkonstante nur empirisch bestimmt werden: Entweder misst man die Kraft zwischen zwei bekannten Ladungen, oder man misst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der elektromagnetischen Wellen im

Vakuum und berechnet daraus ϵ_0 . Beachte dass

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

(Diese Beziehung galt übrigens auch im alten internationalen System.)

In dieser Vorlesung werden wir die beiden Masssysteme benutzen, die bei den Physikern gebräuchlich sind, nämlich das absolute elektrostatische c.g.s. System (e.s.u.) und das neue internationale Masssystem (S.I.)

1.3. Das Coulomb'sche Gesetz

Bei der Formulierung des Coulomb'schen Gesetzes im Abschnitt 1.2. wurde stillschweigend die Existenz von Punktladungen vorausgesetzt. Dies ist eine mathematische Idealisierung. Zwei geladene, makroskopische Körper sind keine Punktladungen, und die Kraftwirkung zwischen ihnen ist nur in speziellen Fällen proportional zu $1/r^2$, z.B. dann, wenn es sich um nichtüberlappende, kugelsymmetrische Ladungsverteilungen handelt, und wenn für r Abstand der Ladungsschwerpunkte eingesetzt wird. (Der analoge Fall bei den Gravitationskräften wurde in Physik I S. 81-83 behandelt). Bei beliebig geformten Ladungen Q_1 und Q_2 ist die Proportionalität der Kraft zu $1/r^2$ nur dann eine gute Approximation, wenn der Abstand der Ladungsschwerpunkte gross ist im Vergleich zu den Liniendimensionen der beiden Ladungen. Wie weit geladene Elementarteilchen, z.B. Elektronen und Protonen, als Punktladungen gelten können, hängt von den Experimenten ab, die man mit ihnen durchführt.

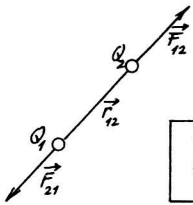
Aus den Atomspektren glaubt man schliessen zu können, dass die Anziehung zwischen Atomkern und umlaufenden Elektron bei Abständen von der Grössenordnung des Atomradius (10^{-8} cm) mit einer Genauigkeit von mindestens 1 Teil in 10^9 durch das Coulomb'sche Ge-

setz gegeben ist. Wie genau es noch gilt bei Abständen von der Gröszenordnung eines Atomkerndurchmessers (10^{-13} cm), ist noch unklar.

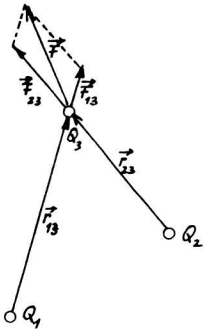
Das Coulomb'sche Gesetz ist eine Vektorbeziehung: Bezeichnen wir

die Kraft, die von der Ladung Q_1 auf die Ladung Q_2 ausgeübt wird, mit \vec{F}_{12} und mit \vec{r}_{12} den Vektor von Q_1 nach Q_2 , dann gilt

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad \text{e.s.u. und} \quad \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad \text{SI}$$

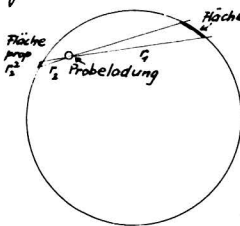


Das Superpositionsprinzip: Sei \vec{F}_{13} die Kraft, die von Q_1 auf Q_3 ausgeübt werde bei Abwesenheit von Q_2 , und \vec{F}_{23} die Kraft, die von Q_2 ausgeübt werde auf dieselbe Ladung Q_3 bei Abwesenheit von Q_1 . Es stellt sich die Frage nach der Kraft, die auf Q_3 wirkt bei gleichzeitiger Anwesenheit von Q_1 und Q_2 . Es gibt bisher keine experimentelle Evidenz dafür, dass man die Coulombkräfte \vec{F}_{13} und \vec{F}_{23} nicht vektoriell addieren dürfe, d.h. es ist $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$.



Direkte experimentelle Prüfung der $1/r^2$ -Abhängigkeit der Kraft:

Henry Cavendish (1731-1810) führte im Jahre 1771 die erste genaue Prüfung der $1/r^2$ -Abhängigkeit durch und machte dabei stillschweigend Gebrauch vom Superpositionsprinzip. Er erteilte einer grossen



hohlen Metallkugel eine Ladung und prüfte nach, ob auf eine kleine geladene Probeladung an einem beliebigen Ort im Innern der hohlen Metallkugel eine Kraft wirke. Wenn das $1/r^2$ -Gesetz stimmt, dann muss die resultierende Kraft, die von der (gleich-

mässig verteilten) Ladung auf der grossen Kugel auf die Probeladung ausgeübt wird, verschwinden. Man sieht dies sofort ein, wenn man sich Kegel mit infinitesimalen Öffnungswinkeln denkt, deren Spitze in der Probeladung liegt. Die Flächenelemente, die ein Kegel aus der grossen Kugel fläche herauschnei-

det, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Probeladung. Die Coulombkräfte heben sich damit auf, wenn das $1/r^2$ -Gesetz gilt. Cavendish konnte innerhalb der experimentellen Unsicherheit keine Kraft nachweisen und schloss, dass das $1/r^2$ -Gesetz auf mindestens 2% genau stimmen müsse. Im Jahre 1936 machten Plimpton und Lawton ein entsprechendes Präzisionsexperiment und fanden, dass die Abweichungen vom $1/r^2$ -Gesetz kleiner sein müssen als 1 Teil in 10^9 , wenn sie überhaupt vorhanden sind.

1.4. Das elektrische Feld \vec{E} und das elektrostatische Potential V

Betrachte als Beispiel eine feste Punktladung Q . Man kann sie feststellen und sogar messen durch Beobachtung der Kraft \vec{F} , die sie auf eine zweite Punktladung Q_0 , die sog. Probeladung ausübt. Jedem Punkt im Raume, zu dem wir die Probeladung hinbringen, ist damit ein Kraftvektor zugeordnet. Im Beispiel ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q Q_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{in e.s.u., und} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q Q_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{in SI,}$$

wobei der Vektor \vec{r} von der gegebenen Ladung Q zur Probeladung Q_0 zeigt. Damit ist ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ definiert. Es ist sinnvoll, der Ladung Q ein Vektorfeld zuzuordnen, doch sollte dieses nicht von einer Probeladung abhängen. Man führt deshalb ein neues Feld ein, das elektrische Feld, $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$. Für das Beispiel der Punktladung Q gilt damit

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}} \quad \text{in e.s.u. und} \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}} \quad \text{in S.I.}$$

Die Dimension von \vec{E} ist gemäss der Definition $\frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$, also

$$[E] = \frac{\text{dyn}}{\text{statcoulb}} \quad \text{in e.s.u. und} \quad [E] = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \quad \text{in SI.}$$

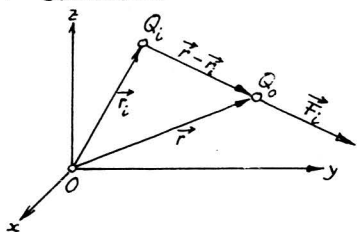
Selbstverständlich kann man mit Hilfe der Definition $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$ eine beliebige Ladungsverteilung charakterisieren. Als zweites Bei-

spiel betrachten wir das Feld \vec{E} , das von verschiedenen Punktladungen Q_i mit den Ortsvektoren \vec{r}_i an einem Ort \vec{r} erzeugt wird. Nach dem Superpositionsprinzip darf man für die Kraft \vec{F} auf die Probeladung Q_0 am Orte \vec{r} schreiben

$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(\vec{r})$, wobei nach der nebenstehenden Skizze

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = \frac{Q_i Q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{e.s.u.}, \text{ sodass}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{e.s.u.}$$



(Beachte, dass das von der Probeladung erzeugte elektrische Feld nicht zum Felde gehört, das man beschreiben will. Nur dies als störend empfindet, kann in Gedanken die Probeladung gegen unendlich kleine Werte streichen lassen.)

Die Verallgemeinerung auf eine allgemeine Ladungsverteilung ("Ladungswolke") ist einfach: Man definiert eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, indem man sagt, dass die Ladung im infinitesimalen Volumenelement $d\vec{r}'$ bei \vec{r}' gegeben ist durch $dQ = \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$. Die obige Summe wird dann zum Volumenintegral über die ganze Ladungsverteilung:

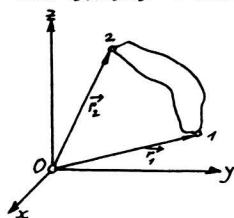
$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{\text{Ladungsverteilung}} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}' \quad \text{e.s.u.}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Ladungsverteilung}} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}' \quad \text{im SI}$$

In der makroskopischen Physik hat man es im allgemeinen mit so grossen Zahlen von Ladungsträgern (Elektronen, Ionen) zu tun, dass man mit kontinuierlichen Ladungsverteilungen rechnen darf.

das elektrostatische Potential: Betrachte das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$, das von einer beliebigen vorgegebenen, unveränderlichen Ladungsverteilung erzeugt werde. Eine Probeladung Q_0 werde nun auf

einem beliebigen geschlossenen Wege verschoben. Die bei einem Umlauf geleistete Arbeit $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ muss verschwinden, denn sonst würde entweder dem System Arbeit zugeführt oder entzogen, ohne dass sich am System etwas geändert hätte *). Daraus folgt, dass die Arbeit, die beim Verschieben der Probeladung von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 geleistet wird, unabhängig ist vom Weg. Die Kraft \vec{F} kann damit als Gradient einer Potentialfunktion dargestellt werden (Physik I S. 76). Auch das elektrische Feld $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$ ist dann als Gradient darstellbar.



Man schreibt in jedem Masssystem

$\vec{E} = -\text{grad } V$ und bezeichnet V als elektrostatisches Potential. Es ist damit

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{und} \quad \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Die Potentialdifferenz $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$ wird auch als elektrische Spannung zwischen den beiden Punkten 1 und 2 bezeichnet. Die Arbeit, die eine Ladung Q_0 leistet bei der Verschiebung von 1 nach 2, ist $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q_0 \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q_0 (V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2))$. Die Spannung ist damit Arbeit pro Ladung:

in e.s.u. $[V] = \frac{\text{erg}}{\text{statell}} = \text{statvolt}$ (abs. elektrostatische c.g.s. Spannungseinheit)

im SI $[V] = \frac{\text{Joule}}{\text{Clt}} = \text{Volt}$

Die Umrechnung von Volt in statvolt: Betrachte zwei Punkte in einem gegebenen elektrostatischen Feld, deren Potentialdifferenz 1 Volt beträgt:

1 Clt	von 1 nach 2 verschoben leistet 1 Joule, und nach S. 10
$3 \cdot 10^9 \text{ statell}^{**})$	" leisten 1 Joule = 10^7 erg
1 statclt	" leistet $\frac{10^7 \text{ erg}}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{3 \cdot 10^2} \text{ erg}$

*) Strenge genommen, muss die Verschiebung der Probeladung unendlich langsam erfolgen; denn während einer Beschleunigung oder Verzögerung wird Energie in Form elektromagnetischer Wellen abgestrahlt

**) Genau genommen ist die Zahl 3 zu ersetzen durch 2,99792458 (S. 10).

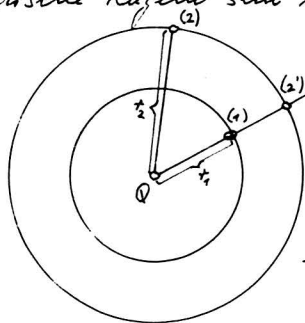
Nach der Definition des Statvolt ist also die Potentialdifferenz $\frac{1}{300}$ Statvolt. 1 Volt entspricht also $\frac{1}{300}$ Statvolt.

Das Statvolt ist also das grössere Mass. Wenn man in einer gegebenen physikalischen Situation eine Potentialdifferenz in Statvolt misst statt in Volt, dann ist die Masszahl 300-mal kleiner. (Genau genommen ist der Umrechnungsfaktor nicht 300, sondern $10^6/c$, wobei c die Masszahl der Lichtgeschwindigkeit in m/sec ist.)

Das Potentialfeld einer Punktladung $+Q$

Wenn man das Potentialfeld einer Punktladung kennt, so kann man mit Hilfe des Superpositionsprinzips das Potentialfeld jeder beliebigen gegebenen Ladungsverteilung berechnen.

Das \vec{E} -Feld einer Punktladung ist kugelsymmetrisch. \vec{E} ist radial gerichtet (nach aussen für positive, nach innen für negative Ladung.) Die Potentialfunktion $V(\vec{r})$ kann nur vom Abstand r räumlich abhängen. Die Äquipotentialflächen müssen konzentrische Kugeln sein mit dem Zentrum Q . Wir berechnen nun die Potentialdifferenz zwischen (1) und (2).



Wegen der Kugelsymmetrie gilt

$$V(1) - V(2) = V(1') - V(2')$$

Zur Berechnung von $V(1) - V(2')$ integriert man vorteilhaft in radialer Richtung

$$V(1) - V(2') = \int_1^{2'} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{wobei } d\vec{s} \parallel \vec{r} \parallel \vec{E}, \text{ also}$$

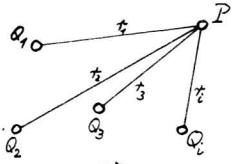
$$V(1) - V(2') = \int_1^{2'} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{Q}{r_2} + \frac{Q}{r_1} = \frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}$$

Es ist also $V(r) = \frac{Q}{r} + \text{const.}$ Damit man weniger schreiben muss, nimmt man $V(r)$ so, dass $\text{const.} = 0$.

$$V(r) = \frac{Q}{r} \quad \text{in e.s.u.} \quad \text{und} \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{im SI}$$

Anschaulich formuliert ist $V(r)$ die Arbeit, die eine positive Einheitsladung abgibt, wenn sie vom Abstand r ausgehend ins unendlich Ferne verschoben wird.

Das Potentialfeld von mehreren Punktladungen Q_i .



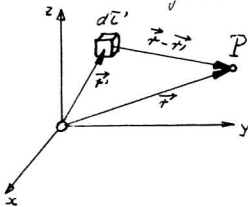
Aus der Gültigkeit der Vektoraddition für die Coulombkräfte (S. 15) folgt die entsprechende Vektoraddition für die elektrischen Felder \vec{E}_i , die von verschiedenen Punktladungen Q_i erzeugt werden: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$. Bezeichnen wir mit V_i den Beitrag der Ladung Q_i zum Potential in P , wird mit $\vec{E}_i = -\text{grad } V_i$

$$\vec{E} = -\sum_i \text{grad } V_i = -\text{grad } \sum_i V_i = -\text{grad } V, \text{ wobei } V = \sum_i V_i.$$

Die Potentiale der verschiedenen Ladungen addieren sich. Das Potential im Punkte P ist damit

$$V = \sum_i \frac{Q_i}{r_i} \quad \text{in e.s.u.} \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i} \quad \text{im SI}$$

Die Verallgemeinerung auf eine allgemeine Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r})$ ist trivial (vgl. S. 17). Die Summation über die Punktladungen in der



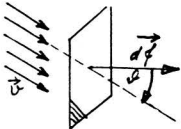
obigen Formel ist durch eine entsprechende Integration über die Ladungsdichteverteilung zu ersetzen:

$$V(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad \text{e.s.u.}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad \text{SI}$$

1.5. Der Feldfluss und der Satz von Gauss

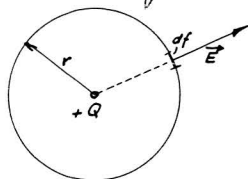
Der Begriff des Flusses stammt aus der Hydromechanik. In einer Strömung denken wir uns ein festes infinitesimales Flächenelement $d\vec{f}$. Am Orte des Flächenelementes sei die Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} . Der Winkel zwischen der Flächennormalen und dem Geschwindigkeitsvektor sei ϑ . Das Flüssigkeitsvolumen, das pro sec durch $d\vec{f}$ hindurchtritt, ist ein Parallelepiped mit der Grundfläche $d\vec{f}$ und der Höhe $v \cos \vartheta$, d.h. $\vec{v} \cdot d\vec{f}$. Ganz analog definiert



man als Fluss des elektrischen Feldes \vec{E} durch ein Flächenelement $d\vec{f}$ das skalare Produkt $\vec{E} \cdot d\vec{f}$.

Der Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung.

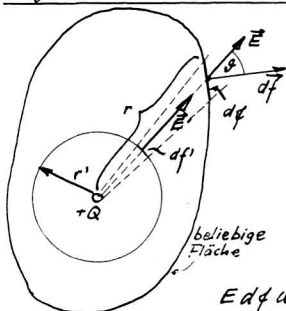
Betrachte als einfachstes Beispiel den Fluss des Feldes \vec{E} einer Punktladung Q durch eine kugelförmige Kugelfläche vom Radius r .



$$\begin{aligned}
 \iint \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \iint E df \quad \begin{array}{l} \text{Kugel-} \\ \text{fläche} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{weil} \\ d\vec{f} \parallel \vec{E} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Symmetrie} \\ E \text{ ist konstant} \end{array} = E \iint df = E \cdot 4\pi r^2 \\
 &= \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q \quad \text{in e.s.u.} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \text{in SI}
 \end{aligned}$$

Wegen dem $1/r^2$ Gesetz hängt der totale Fluss durch die Kugelfläche nicht vom Radius der Kugel ab. Die Konsequenzen des $1/r^2$ Gesetzes gehen aber noch viel weiter:

Der Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung Q durch eine beliebige sie umschliessende Fläche ist $4\pi Q$ in e.s.u. und $\frac{1}{\epsilon_0} Q$ in SI



Beweis:

$E' df' =$ Fluss durch df'

$E df \cos \vartheta =$ Fluss durch df

$E = E' \frac{r'^2}{r^2}$ nach $1/r^2$ -Gesetz

$df = df' \frac{r'^2}{r^2} \frac{1}{\cos \vartheta}$ nach Geometrie

Damit wird der Fluss durch df :

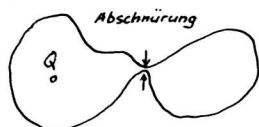
$$E df \cos \vartheta = E' \frac{r'^2}{r^2} df' \frac{r'^2}{r^2} \frac{1}{\cos \vartheta} \cdot \cos \vartheta = E' df'$$

Da dies für jedes Flächenelement gilt, ist der Fluss durch die beliebig geformte Fläche gleich dem Fluss durch die Kugel. Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar:

Der Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung Q durch eine beliebige, sie nicht umschliessende, geschlossene Fläche verschwindet.

Beweis: Betrachte eine geschlossene Fläche, die die Ladung Q umschließt und trenne von dieser Fläche durch allmähliche Ab-



schmürung eine geschlossene Teilfläche ab, die die Ladung Q nicht umschließt. Der Fluss durch die Gesamtfläche bleibt beim Abschnüren $\frac{1}{\epsilon_0} Q$. Der Fluss durch die Teilfläche, die die Ladung umschließt, ströbt gegen $\frac{1}{\epsilon_0} Q$, sodass für die abgeschnürte Teilfläche rechts kein Fluss mehr übrig bleibt.

Der Fluss des elektrischen Feldes beliebiger Ladungsverteilungen.

Nach dem Superpositionsprinzip addieren sich die Felder, wenn mehrere Ladungen vorhanden sind. Damit addieren sich auch ihre Flussanteile durch eine gegebene Fläche. Nach dem obigen Korollar



tragen bei einer Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r})$ nur die Ladungselemente $\rho(\vec{r})d\tau$ innerhalb der geschlossenen Fläche A zum Gesamtfluss durch diese Fläche bei:

$$\underbrace{\iint_{\text{geschl. Fläche } A} \vec{E} \cdot d\vec{f}}_{\text{geschl. Fläche } A} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\iiint_{\text{umschl. soner Raum}} \rho(\vec{r}) d\tau}_{\text{Gesamt-ladung inner-halb der geschl. Fläche } A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \text{im SI, und } 4\pi Q \quad \text{in e.s.u.}$$

Bei einer beliebigen statischen Ladungsverteilung ist der Fluss des elektrischen Feldes durch eine beliebige geschlossene Fläche A gegeben durch $4\pi Q$ in e.s.u. bzw. $\frac{1}{\epsilon_0} Q$ im SI, wobei Q die Gesamtladung innerhalb der Fläche bedeutet.

Dieser Integralsatz lässt sich auf eine differentielle Form bringen mit Hilfe einer rein mathematischen Beziehung aus der Vektoranalysis, nämlich des Satzes von Gauss. Angewendet auf das Vektorfeld \vec{E} lautet er

$$\underbrace{\iint_{\text{geschl. Fläche } A} \vec{E} \cdot d\vec{f}}_{\text{geschl. Fläche } A} = \underbrace{\iiint_{\text{Raum von A umschlossen}} \text{div } \vec{E} d\tau}_{\text{Raum von A umschlossen}}. \quad \text{Setzt man dies oben ein, so wird}$$

$\underbrace{\iiint_{\text{Raum von A umschlossen}} \text{div } \vec{E} d\tau}_{\text{Raum von A umschlossen}} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\iiint_{\text{Raum von A umschlossen}} \rho(\vec{r}) d\tau}_{\text{Raum von A umschlossen}} \quad (\text{im SI}).$ Dies gilt für eine beliebige Fläche A , insbesondere auch an jedem Ort für ein beliebig geformtes Volumenelement. Also

sind die Integranden gleich:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{(1)}} \text{ im SI}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho} \text{ in e.s.u.}$$

Wir berechnen dies als die Differentialform des Satzes von Gauss in der Elektrostatik. Es handelt sich insofern um eine lokale Beziehung, als $\operatorname{div} \vec{E}$ und ρ am selben Orte zu nehmen sind. Die entsprechende Integralform ist nach S. 22

$$\underbrace{\iint_{\text{geschl. Fläche } A} \vec{E} \cdot d\vec{f}} = \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} Q}_{\text{totale Ladung innerhalb } A}$$

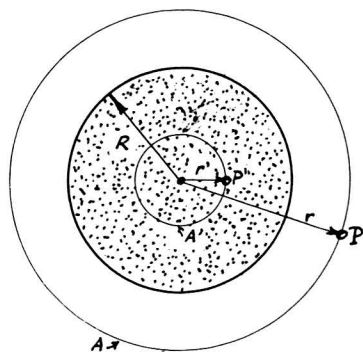
im SI und

$$\underbrace{\iint_{\text{geschl. Fläche } A} \vec{E} \cdot d\vec{f}} = \underbrace{4\pi Q}_{\text{totale Ladung innerhalb } A} \text{ in e.s.u.}$$

Diese Beziehungen sind alle eine Folge des $1/r^2$ Gesetzes.

Beispiele zur Anwendung des Satzes von Gauss (im SI)

① Das Feld einer homogenen Kugelladung.



Eine Kugel vom Radius R sei mit einer homogenen Raumladung der Dichte ρ_0 erfüllt. (Dies ist ein akademisches Beispiel; denn es dürfte nicht so leicht sein, eine solche Ladungsverteilung im Laboratorium zu produzieren). Die Gesamtladung der Kugel ist $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$.

a) Das Feld ausserhalb der Kugel, $r > R$.

Zur Berechnung des Feldes im Punkte P machen wir ausgiebig Gebrauch von der Kugelsymmetrie des Systems. Wir denken uns eine konzentrische Kugeloberfläche A durch P . Nach der obigen Integralbeziehung ist der Fluss des Feldes \vec{E} durch diese Fläche $\frac{1}{\epsilon_0} Q$. Aus Symmetriegründen steht das Feld \vec{E} überall senkrecht auf der Kugeloberfläche A und hat den Betrag $E(r)$, sodass der Fluss $4\pi r^2 E(r)$ beträgt. Damit ist

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \text{und} \quad E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

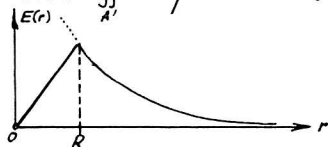
Das elektrische Feld ausserhalb der Kugel unterscheidet sich also nicht

vom Felde einer Punktladung Q im Zentrum (vgl. S.16).

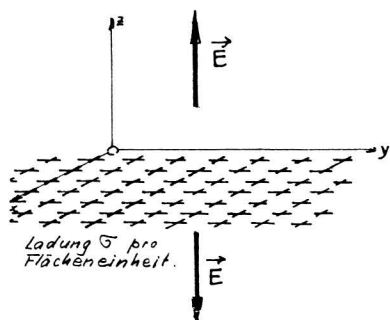
b) Das Feld innerhalb der Kugel, $r < R$.

Man denkt sich eine konzentrische Kugeloberfläche A' durch den Punkt P' , in dem man das Feld berechnen will. Die Ladung innerhalb A' , $Q' = \left(\frac{r'}{R}\right)^3 Q$, ist für den Feldfluss durch A' massgebend, d.h. dieser beträgt $\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{r'}{R}\right)^3 Q$. Anderseits erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie $\iint_{A'} \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi r'^2 E(r')$, sodass $\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{r'}{R}\right)^3 Q = 4\pi r'^2 E(r')$, woraus

$$E(r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \cdot r'$$

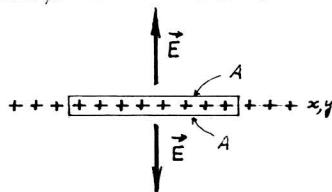


② Das Feld einer ebenen, homogenen Flächenladung.



Betrachte eine Ebene, die sich ins Unendliche erstreckt, und die eine homogene Flächenladungsdichte von $+\sigma$ Coulomb/ m^2 trägt. Zur Analyse des Problems lassen wir die xy -Ebene mit der geladenen Ebene zusammenfallen. Aus Symmetriegründen ist der \vec{E} -Vektor im oberen Halbraum parallel

zur z -Achse und im unteren Halbraum antiparallel dazu. In beiden Halbräumen ist die Ladungsdichte null, sodass nach S.24 $\text{div } \vec{E} = 0$. Ganz allgemein ist $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$. Mit $E_x = E_y = 0$ folgt dann für die Halbräume $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, also $E_z = \text{const}$. Ein Vektorfeld, bei dem der Vektor unabhängig ist vom Ort, nennt man homogen. In beiden Halbräumen herrscht also ein homogenes Feld. Dieses lässt sich berechnen mit Hilfe der Integralform des Satzes von Gauss. Sie wird angewendet auf eine



flache Dose, die im Stück A der geladenen Ebene umschließt. Deckel und Boden der Dose sind parallel zur xy -Ebene und haben je die Fläche A :

$$\iint_{\text{Oberfläche der Dose}} \vec{E} \cdot d\vec{f} = 2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{Q}_{\text{Ladung in Dose}} = \frac{1}{\epsilon_0} A\sigma, \text{ also}$$

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad E = 2\pi\sigma \quad \text{im e.s.u.}$$

③ Das Feld einer Oberflächenladung auf einem Leiter.

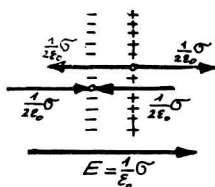
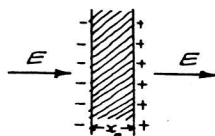
In der phänomenologischen Elektrizitätslehre kümmert man sich nicht um den Aufbau der Materie aus Atomkernen und Elektronen. Insbesondere wird in der phänomenologischen Elektrostatik ein Leiter ganz einfach als ein Gebiet betrachtet, in dem das elektrische Feld verschwindet. Wenn dies nicht so wäre, würde ein Strom fließen, und die Situation wäre nicht statisch. Im Inneren des Leiters gibt es vom phänomenologischen Standpunkt aus kein Gebiet mit einer resultierenden Ladung; denn nach dem Gauss'schen Integralsatz (S. 23) würde ein solches zu einem nicht-verschwindenden Feldfluss und damit zu einem nicht-verschwindenden Felde Anlass geben. Ladungen können damit nur auf der Oberfläche auftreten, und zwar wird sich die Oberflächenladungsverteilung so einstellen, dass das Feld im Inneren des Leiters verschwindet. An der Oberfläche des Leiters kann ferner das \vec{E} -Feld keine Tangentialkomponente haben; denn eine solche würde zu Oberflächenströmen Anlass geben. Der \vec{E} -Vektor an der Oberfläche steht senkrecht auf dieser.

Beispiel der geladenen Metallkugel vom Radius R : Aus Symmetriegründen ist die Oberflächenladungsdichte homogen $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, wobei Q die Gesamtladung der Kugel ist. Nach dem Integralsatz von S. 23 beträgt die Feldstärke außerhalb der Kugel $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, also unmittelbar über der Oberfläche $E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$. Ganz allgemein gilt für die elektrische Feldstärke an der Oberfläche eines Leiters in der phänomenologischen Elektrostatik

$$\boxed{E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{E = 4\pi\sigma} \quad \text{im e.s.u.}$$

Beispiel der ungeladenen Metallplatte im homogenen elektrischen Feld: Eine unendlich ausgedehnte, ungeladene Metallplatte der Dicke x_0 werde in ein homogenes elektrisches Feld getaucht, das senkrecht steht auf der Plattenebene. Aus Symmetriegründen

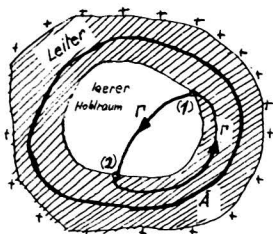
steht das Feld nach dem Eintauchen immer noch senkrecht auf der Platte, und es ist immer noch homogen. Die Feldstärke nach dem Eintauchen sei E (Im allgemeinen wird sie nicht übereinstimmen mit der Feldstärke vor dem Eintauchen.) Auf der linken Seite der Platte ist dann die Oberflächenladungsdichte $\sigma = -\epsilon_0 E$ und auf der rechten Seite $\sigma = +\epsilon_0 E$. Das Feld im Raum kann aufgefasst werden als Superposition von drei Feldern:



a) Feld der Flächenladung links } beide haben nach
b) Feld der Flächenladung rechts } S. 24/25 den Betrag $\frac{1}{2\epsilon_0}\sigma$
c) das von einer äusseren Einrichtung erzeugte Feld \vec{E} .

Die Superposition ergibt innerhalb der Platte das Feld null und ausserhalb \vec{E} .

④ Feld in einem leeren Hohlraum in einem Leiter.



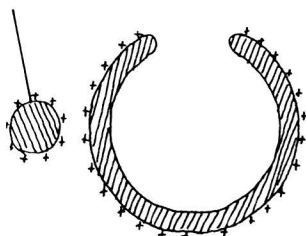
Ein Leiter habe eine beliebige Ladungsverteilung auf seiner äusseren Oberfläche. Da wir wieder den statischen Fall betrachten, verschwindet das Feld im Leiter und damit auch $\iint \vec{E} d\vec{f}$ über die eingezeichnete Fläche A . Damit

muss die totale Ladung innerhalb A verschwinden, d.h. es hat gleichviel positive Ladung wie negative Ladung innerhalb A . Da es im Innern des Leitermaterials keine resultierende Ladung haben kann, wie im vorhergehenden Beispiel gezeigt wurde, können nur auf der Innenfläche des Hohlkörpers Ladungen auftreten, und zwar müsste es gleichviel positive wie negative Ladung sein. Da das elektrostatische Feld ein Potentialfeld ist, muss das Zirkulationsintegral $\oint \vec{E} d\vec{s}$ über den eingezeichneten geschlossenen Weg Γ verschwinden. Die Wegstrecke 2+1 im Leiter trägt nichts zum Integral bei, da das elektrostatische Feld im Leiter verschwindet. Also verschwindet auch $\int \vec{E} d\vec{s}$ auf dem Weg durch den Hohlraum hindurch. Dies gilt für jeden Weg durch

den Hohlraum zwischen zwei beliebigen Punkten seiner Innenfläche. Es ist also nicht möglich, dass an einer Stelle der Innenfläche eine positive und an einer andern Stelle eine negative Oberflächenladung liegt; denn das Integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ von einer positiven Ladung zu einer negativen Ladung kann nicht verschwinden. Da die Innenfläche nirgends Ladung trägt, muss das elektrostatische Feld im Hohlraum verschwinden.

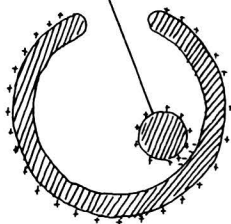
Prinzip des Faraday-Käfigs: Das elektrostatische Feld im leeren Hohlraum eines Leiters verschwindet

Anwendung: Eine positiv aufgeladene, leitende Hohlkugel, die ein Loch besitzt, soll noch mehr positive Ladung zugeführt werden durch Berührung mit einer kleinen, positiv geladenen Metallkugel.



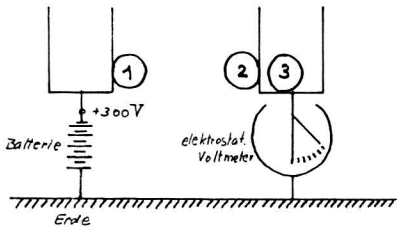
Bringt man die kleine Kugel von aussen an die grosse Kugel heran, dann ist der Ladungsübertragung eine Grenze gesetzt: Sobald die Flächenladungsdichte der grossen Kugel

bei der Berührungsstelle diejenige der kleinen Kugel erreicht hat, verschwindet das elektrische Feld an der Berührungsstelle und es kann keine Ladungsübertragung mehr stattfinden.



Nähert man hingegen die kleine Kugel der Innenwand, dann ist das von der kleinen Kugel verursachte Feld immer so gerichtet, dass die Ladung vollständig auf die grosse Kugel übergeht. Es ist also auf diesem Wege möglich, der grossen Kugel eine grosse Ladung und damit ein grosses Potential zu erteilen: Prinzip des Van de Graaff Generators.

Demonstrationsexperiment



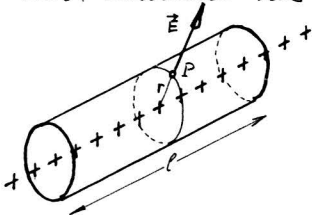
Eine Konservendose wird durch eine Batterie auf einem Potential von 300 Volt gegen Erde gehalten. Eine zweite Dose ist isoliert aufgestellt und mit einem Elektrometer verbunden, welches ihr Potential gegen Erde misst. Anfänglich sei die zweite Dose ungeladen d.h. das Elektrometer schlägt nicht aus.

Lässt man nun eine (isolierte) Metallkugel zwischen ① und ② hin- und herpendeln, dann wird die zweite Dose langsam aufgeladen. Ihr Potential steigt aber nicht über 300 Volt.

Lässt man hingegen die Metallkugel zwischen ① und ③ hin- und herpendeln, dann kann die zweite Dose auf ein Potential gebracht werden, das ein Vielfaches von 300 Volt beträgt.

⑤ Feld einer geladenen Geraden.

Eine Gerade trage die Ladung q pro Längeneinheit. Berechne das elektrische Feld.



Aus Symmetriegründen ist das Feld radial nach aussen gerichtet, und der Betrag hängt nur vom Abstand r von der Geraden ab.

Als Gauss'sche Fläche A wählt man deshalb eine Kreiszylinderfläche, deren Achse die Gerade ist, und die den Punkt P enthält, in welchem wir das Feld berechnen wollen. Zu $\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{f}$ trägt nur der Zylindermantel bei:

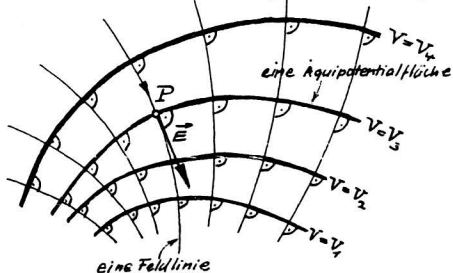
$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{f} = 2\pi r l E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} l q, \text{ also } E(r) = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

Auch diese $1/r$ -Abhängigkeit ist eine Folge des Coulomb'schen Gesetzes.

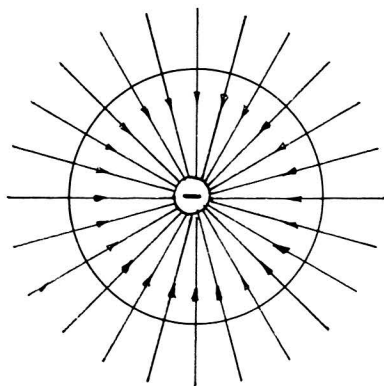
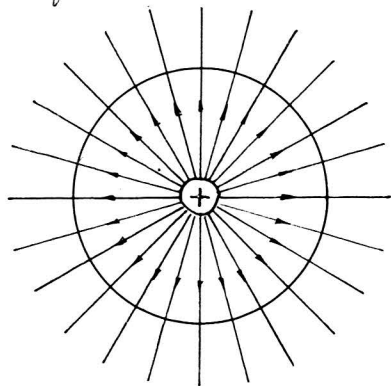
1.6. Feldlinien und Äquipotentialflächen

nach S.18 gilt in der Elektrostatik $\vec{E} = -\text{grad } V$. Es ist eine mathematische Eigenschaft des Potentialfeldes, dass in jedem Punkt der Gradientenvektor senkrecht steht auf der Äquipotentialfläche durch diesen Punkt (Physik I S.77). In jedem Punkt P des Feldes liegt

\vec{E} in der Tangente an die orthogonale Trajektorie der Äquipotentialflächen, die durch P geht. Die orthogonalen Trajektorien der Äquipotentialflächen werden als Feldlinien bezeichnet und

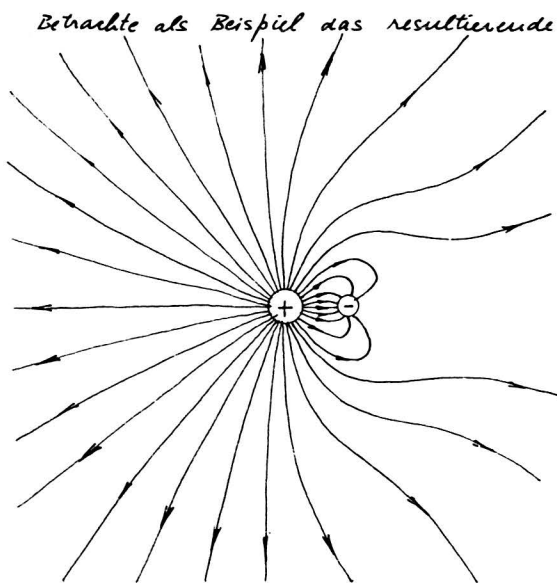


häufig zur Veranschaulichung des elektrischen Feldes benutzt. Man ordnet den Feldlinien eine Richtung zu, nämlich die Richtung des Vektors \vec{E} . Bei einer positiven Punktladung laufen die Feldlinien radial nach aussen und bei einer negativen Punktladung radial nach innen. Die Äquipotentialflächen sind in diesen beiden Spezialfällen konzentrische Kugeln um die Punktladungen:



Zur quantitativen Veranschaulichung kann man die Festsetzung machen, dass von einer Ladung Q $\frac{1}{\epsilon_0} Q$ Feldlinien ausgehen in SI und $4\pi Q$ Feldlinien in e.s.u.. Die Feldstärke in einem beliebigen Punkt P ist dann gleich der Anzahl der Feldlinien pro m^2 bzw. pro cm^2 , die durch die Äquipotential-

zentralfläche in diesem Punkte hindurchtreten. Für eine Punktladung ist der Satz evident, für eine allgemeine Ladungsverteilung folgt er dann sofort aus dem Superpositionsprinzip. Positive Ladungen sind "Quellen" des Feldes und negative Ladungen "Senken".

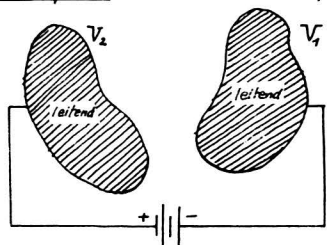


Betrachte als Beispiel das resultierende Feld zweier Punktladungen $+4Q$ und $-Q$. Ein sehr rohes Feldlinienbild ist nebenstehend skizziert. Ein Viertel der Anzahl der Feldlinien, die von $+4Q$ ausgehen enden auf $-Q$. (In einem zweidimensionalen Bild mit einer endlichen Anzahl von Feldlinien kommt dieses Verhältnis nicht genau zum Ausdruck.)

1.7. Die Gleichung von Laplace

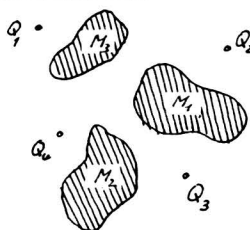
Die Gauss'schen Beziehungen auf S. 23 erlauben im Prinzip die direkte Berechnung des elektrischen Feldes bei vorgegebener Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. In praktischen Problemen ist die Ladungsverteilung sehr häufig nicht zum vornherein bekannt:

1. Beispiel : Zwei Metallkörper seien mit den Polen (Klemmen) einer Batterie



durch Leiter verbunden. Die Batterie ist für uns hier nur eine Einrichtung, die zwischen den Klemmen eine konstante Potentialdifferenz (Spannung) $V_1 - V_2$ aufrecht erhält.

2. Beispiel: Im Raume seien feste Punktladungen Q_1, Q_2, \dots vorgegeben. Man bringt nun ungeladene Metallkörper in diesen Raum. Offensichtlich wird das Feld dadurch verändert.



Wie geht man in diesen Beispielen vor bei der Berechnung des elektrischen Feldes?

Wir gehen von der Tatsache aus, dass unter statischen Bedingungen das elektrische Feld \vec{E} in einem Leiter (vom phänomenologischen Standpunkt aus gesehen) verschwindet (vgl. S. 25). Ein Leiter ist damit als Gebiet mit konstantem Potential aufzufassen ($\vec{E} = -\text{grad } V = 0$ wenn $V = \text{const.}$). Insbesondere ist die Oberfläche eines Leiters eine Aquipotentialfläche. Die Potentialfunktion $V(\vec{r})$ muss also gewisse Randbedingungen erfüllen.

Im Raume zwischen den Leitern und den Punktladungen sind keine Ladungen vorhanden, sodass hier $\text{div } \vec{E} = 0$. Mit $\vec{E} = -\text{grad } V$ wird daraus $\text{div grad } V = 0$. In kartesischen Koordinaten ist

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{und} \quad \text{grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \text{sodass}$$

$$\text{div grad } V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$$

wobei wir mit Δ den Laplace-Operator bezeichnet haben (vgl. Physik I S. 226/227). Die Potentialfunktion $V(x, y, z)$ muss also in obigen Beispiel folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\Delta V = 0$$

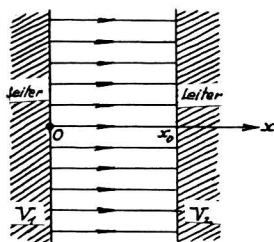
Dies ist die Gleichung von Laplace

Sie ist zu lösen unter den Randbedingungen, dass die Leiteroberflächen Aquipotentialflächen sind. Im ersten Beispiel ist das Potential vorgeschrieben: Die eine Leiteroberfläche ist auf dem Potential V_1 , die zweite auf dem Potential V_2 . Im zweiten Beispiel stellen sich die Potentiale der Leiter irgendwie ein. Man kann mathematisch beweisen, dass es bei einer vorgegebenen Anordnung nur eine eindeutige Lösung der Laplace Gleichung gibt,

wenn man von einer additiven Konstante absieht, die man eventuell zur Normierung der Potentialfunktion hineinsteckt.

Rechenbeispiele

- ① Das Feld zwischen ebenen, parallelen Leiterflächen mit vorgegebenen Potentialen V_1 und V_2

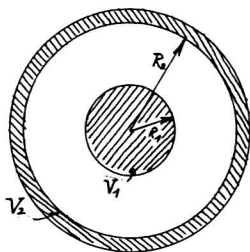


Die leitenden Ebenen sind senkrecht zur x -Achse und unendlich ausgedehnt. Aus Symmetriegründen hängt dann das Potential V nur von x ab. Die Laplace-Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \text{ Die allgemeine Lösung ist } V(x) = A + Bx$$

Die Konstanten A und B sind durch Randbedingungen bestimmt: $V(x) = V_1$ für $x=0$ und $V(x) = V_2$ für $x=x_0$. Man erhält $V(x) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{x_0} \cdot x$. Die Äquipotentialflächen sind Ebenen senkrecht zur x -Achse. Durch Bildung des Gradienten erhält man das elektrische Feld \vec{E} . Es ist parallel zu x . $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_2 - V_1}{x_0} = \text{const.}$ Das Feld ist homogen. Die Ladungsdichte σ auf der Metalloberfläche ist nach S. 25 $\sigma = \epsilon_0 E$ im SI und $\sigma = \frac{1}{4\pi} E$ in e.s.u.

- ② Feld im Raum zwischen leitenden, konzentrischen Kugeln.



Polarkoordinaten sind der Symmetrie des Problems angepasst. Ganz allgemein lautet die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten (vgl. Physik I S. 228):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Wegen der Kugelsymmetrie verschwinden die Ableitungen nach ϑ und φ , und es bleibt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \text{ Es ist offensichtlich, dass ein Potenzansatz diese Differentialgleichung befriedigt. Wir setzen ein}$$

$$V(r) = Ar^\alpha + B \text{ und erhalten dabei}$$

$$A[\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + 2\alpha r^{\alpha-2}] = 0. \text{ Da } r \neq 0 \text{ wird } \alpha(\alpha-1) + 2\alpha = 0,$$

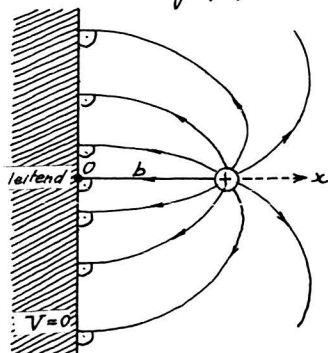
$$\alpha^2 + \alpha = 0, \text{ also } \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = -1.$$

Mit der Lösung $\alpha = 0$ sind die Randbedingungen $V(R_1) = V_1, V(R_2) = V_2$ nicht erfüllbar falls $V_1 \neq V_2$. Die gesuchte Lösung ist also von der Form

$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

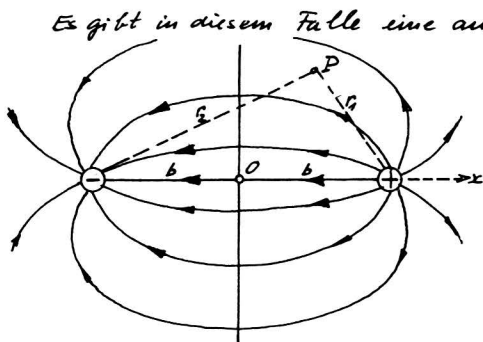
Durch Einsetzen der Randbedingungen wird $A = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$, $B = \frac{V_1 R_1 - V_2 R_2}{R_1 - R_2}$

③ Punktladung gegenüber einem leitenden Halbraum.



Eine positive Punktladung $+Q$ befinde sich im Abstand b von einem leitenden Halbraum. Da keine absoluten Potentiale vorgegeben sind (im Gegensatz zu den vorhergehenden Beispielen), darf man die Normierung der Potentialfunktion festlegen. Das Potential des leitenden Halbraumes sei null, d.h. die Oberfläche des Leiters, die Ebene

$x=0$, sei die Äquipotentialfläche $V=0$. Wir suchen also die Lösung der Laplace-Gleichung für folgende Situation: Im Abstand b von der Äquipotentialfläche $x=0$ liegt die Punktladung $+Q$.



Es gibt in diesem Falle eine andere physikalische Anordnung, die im rechten Halbraum identisch ist und insbesondere auch die Bedingung erfüllt, dass die Ebene $x=0$ die Äquipotentialfläche $V=0$ ist: Man denke sich den leitenden Halbraum weg und setze bei $x=-b$ die

Ladung $-Q$ hin. Die Potentialfunktion ist in diesem Falle nach S. 19 gegeben durch $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right)$. Dies ist eine Lösung der Laplace-Gleichung, da keine Raumladungen vorhanden sind. Für den rechten Halbraum ist es die gesuchte Lösung des ursprünglichen Problems, da sie die Randbedingung erfüllt und da die Laplace-Gleichung nur eine einzige Lösung hat.

Die Ladung $+Q$ kann nicht wissen, ob sie einem leitenden Halbraum im Abstand b oder einer Ladung $-Q$ im Abstand

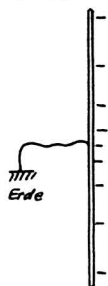
2b gegenübersteht, da sich die Felder in der rechten Halbebene für diese beiden Fälle nicht unterscheiden. Im beiden Fällen wirkt auf $+Q$ eine Kraft vom Betrag $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{(2b)^2}$ in der $-x$ -Richtung. Diese Kraft wird treffend als Spiegelbildkraft bezeichnet.

Die Influenzladung auf der Oberfläche des leitenden Halbraumes.

Auf der Oberfläche des leitenden Halbraumes liegt nach S.25 eine Flächenladung der Dichte $\sigma = \epsilon_0 E$, wobei E die elektrische Feldstärke unmittelbar über der Oberfläche bedeutet. Im Beispiel ist σ negativ, da \vec{E} gegen den Leiter zeigt. Diese Flächenladung wird als Influenzladung bezeichnet. Integriert man σ über die ganze Ebene $x=0$, so erhält man genau $-Q$, wie man folgendermassen einsehen kann: Im Falle zweier entgegengesetzt gleichen Ladungen endet der ganze von $+Q$ ausgehende Feldfluss auf $-Q$; denn die Gesamtladung des Systems verschwindet (Integralform des Satzes von Gauss S.23). Der ganze Fluss tritt also durch die Ebene $x=0$ hindurch. Im Fall des leitenden Halbraumes wird also der ganze Fluss auf der Oberfläche enden. Die gesamte Flächenladung ist damit $-Q$.

Gewährleistung der Ladungserhaltung.

Der leitende Halbraum darf wegen der Ladungserhaltung keine resultierende Ladung bekommen durch die blossen Annäherung einer Punktladung $+Q$. Die der Oberflächenladung $-Q$ entsprechende positive Influenzladung ist im Falle des leitenden Halbraumes bei $x \rightarrow -\infty$ zu suchen. Von dort aus übt sie aber keinen Einfluss aus auf das Feld im Halbraum $x > 0$.



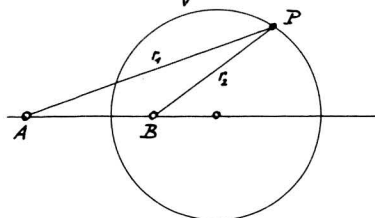
⊕

Eine geerdete Blechtafel wirkt wie ein leitender Halbraum, da die positive Influenzladung zur Erde, und damit praktisch ins unendlich ferne "abfliessen" kann.

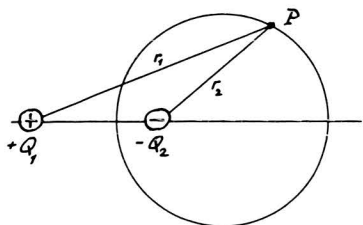
④ Punktladung in der Nähe einer ungeladenen, leitenden Kugel.

Dieses Problem lässt sich auf ähnliche Weise lösen

wie das Vorhergehende. Man braucht dazu folgenden Satz aus der Geometrie:



der geometrische Ort des Punktes P, für dessen Abstände r_1 und r_2 von zwei Punkten A und B folgende Gleichung gilt $\frac{a}{r_1} - \frac{b}{r_2} = 0$ ist eine Kugelfläche, deren Zentrum auf der Verbindungsgeraden AB liegt.



Die Anwendung auf die Elektrostatik ist nebenstehend skizziert: Das Potentialfeld zweier Punktladungen $+Q_1$ und $-Q_2$ ist nach S. 20 gegeben durch

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2}$. Die Äquipotentialfläche $V = 0$ ist also eine Kugel. Man identifiziert sie mit einer Metallkugel und argumentiert ähnlich wie beim Beispiel ③.

1.8. Die Gleichung von Poisson

Die Gleichung von Laplace gilt nur bei Abwesenheit von Raumladungen. Sie fasst auf der Beziehung $\text{div } \vec{E} = 0$. Wenn Raumladungen zugelassen sind, muss man setzen $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$. Mit $\vec{E} = -\text{grad } V$ wird dann $\text{div grad } V + \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$, und unter Verwendung des Laplace Operators Δ

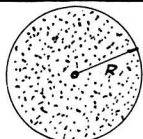
$$\Delta V + \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad \text{im SI und}$$

$$\Delta V + 4\pi \rho = 0 \quad \text{in e.s.u.}$$

Dies ist die Gleichung von Poisson.

Anwendungsbeispiele

① Das elektrische Feld einer homogenen Kugelladung:



$\rho = \rho_0$ für $r \leq R$ | Für Kugelsymmetrie lautet der Laplace Operator nach S. 32
 $\rho = 0$ für $r > R$
 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$. Beim vorliegenden Problem verwendet

man vert. chaft folgende Schreitweise $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$, sodass

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 = 0 \quad \text{für } r \leq R$$

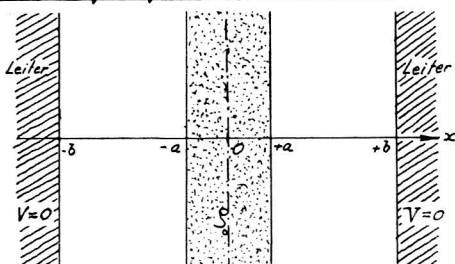
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 r^2 \quad \text{Die erste Integration nach } r \text{ liefert}$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \rho_0 r^3 + A \quad \text{also} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \rho_0 r + \frac{A}{r^2}$$

Bei Kugelsymmetrie ist $E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$. Das Feld im Zentrum kann nicht unendlich gross werden, da dort keine Punktladung ist, also $A = 0$ und $E(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_0 r$, was auf S. 23/24 schon mit dem Satz von Gauss gefunden wurde. Eine weitere Integration nach r führt auf

$V(r) = -\frac{1}{6\epsilon_0} \rho_0 r^2 + B$. Die Integrationskonstante B wird festgelegt, indem man das absolute Potential für einen Punkt vorgibt. Für $r > R$ gilt die kugelsymmetrische Lösung der Gleichung von Laplace. Die Integrationskonstanten sind so zu wählen, dass $V(r)$ bei $r = R$ nicht springt.

② Homogen geladene Schicht



In der Mitte zwischen zwei geerdeten Metallplatten befindet sich eine Schicht der Dicke $2a$ mit homogener Ladungsdichte ρ_0 . (Anstelle der geerdeten Metallplatten kann man sich die Oberflächen der leitenden Halbräumen denken.

Vgl. S. 34). Das System kann damit wie folgt beschrieben werden:

$$\left. \begin{array}{ll} |x| > b & \text{leitender Halbraum auf Potential null} \\ a < |x| < b & \text{leerer Raum} \\ -a < |x| < a & \text{homogene Raumladung.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{senkrecht zur } x\text{-Achse.} \\ \text{es erstreckt sich das} \\ \text{System ins Unendliche. Das Potential} \end{array}$$

hängt also nur von x ab. Das Feld \vec{E} ist damit parallel zur x -Achse. Die Poisson Gleichung ist damit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$$

1) Raum $-a < x < +a$: $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Die Lösung der Poisson -

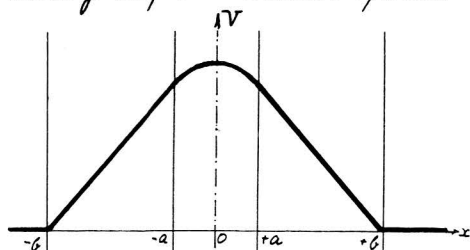
gleichung ist von der Form $V(x) = Ax^2 + Bx + C$. Der lineare Term verschwindet, da $x=0$ Symmetrieebene ist.

2) In den leeren Räumen $a < |x| < b$ gilt die Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$, d.h. $V(x)$ ist eine lineare Funktion. Wenn wir für den Raum rechts schreiben $V(x) = \alpha x + \beta$, müssen wir aus Symmetriegründen für den Raum links schreiben $V(x) = -\alpha x + \beta$. Die Felder in den beiden leeren Räumen sind also homogen und einander entgegengesetzt gerichtet.

3) In den leitenden Räumen ist $V=0$ nach Voraussetzung.

4) Grenzflächen $x = \pm a$: Die elektrische Feldstärke $E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ist endlich da die Ladungsdichte endlich ist. $V(x)$ ist also stetig. Wegen der Poisson-Gleichung ist auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ endlich. Damit ist auch $\frac{\partial V}{\partial x}$ stetig an dieser Grenzfläche.

5) Grenzflächen $x = \pm b$: Für eine positive Raumladungsdichte ρ_0 zeigt der Vektor \vec{E} bei $x = \pm b$ in den Leiter hinein. Die Influenzladung auf der Leiteroberfläche ist dann negativ. Der Betrag der



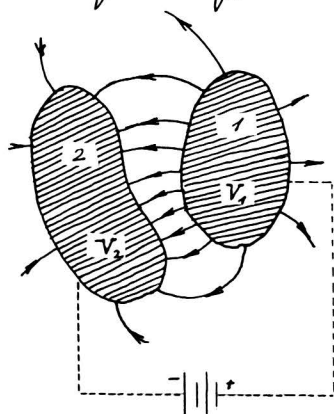
Flächenladungsdichte ist $\sigma = \epsilon_0 E$. Da die Feldstärke endlich ist, ist $V(x)$ stetig, auch an der Oberfläche. Hin- gegen ist $\frac{\partial V}{\partial x}$ nicht stetig: E springt vom endlichen Wert im

leeren Raum auf den Wert null im Leiter. Da alle von der Raumladungsschicht ausgehenden Feldlinien auf einer der beiden Leiteroberflächen enden, ist Oberflächenladungsdichte $\sigma = a\rho_0$.

1.9. Der Kondensator und der Begriff der Kapazität

Definition und Mass der Kapazität

Zwei ungeladene Leiter 1 und 2 befinden sich im sonst leeren Raum. Vom Leiter 1 werde die Ladung $-Q$ weggenommen (durch Ladungstrennung) und auf dem Leiter 2 gebracht. Man kann die-



sen Ladungstransport realisieren, indem man auf dem Leiter 1 ein Klebeband klebt, dieses wegreisst und dann auf dem Leiter 2 klebt (vgl. S. 3). Der Leiter 1 bleibt dabei mit der Ladung $+Q$ zurück und der Leiter 2 bekommt die Ladung $-Q$. Eleganter ist es jedoch, wenn man den Leiter 1 mit dem positiven und den Leiter 2 mit dem negativen Pol einer Batterie verbindet (vgl. S. 30). Im Räume

außerhalb der Leiter herrscht dann ein elektrisches Feld (auch nach dem Entfernen der Batterie). Da das System als Ganzes ungeladen ist, verschwindet der totale Feldfluss $\iint \vec{E} \cdot d\vec{f}$ durch eine Fläche, die es ganz umschließt. Der ganze vom Leiter 1 ausgehende Feldfluss endet damit auf dem Leiter 2. Das Linienintegral $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ von einem beliebigen Punkt des ersten Leiters zu einem beliebigen Punkt des zweiten Leiters ist unabhängig vom Weg und unabhängig von den gewählten Punkten auf den Leitern, nämlich $V_1 - V_2$. Da die elektrische Feldstärke E proportional ist zur felderzeugenden Ladung, ist auch die Potentialdifferenz proportional zu $|Q|$. Der Quotient

$$C = \frac{|Q|}{|V_1 - V_2|}$$

hängt damit nur noch von der Geometrie der Leiteranordnung ab. Man nennt C die Kapazität des Leiters 1 gegen den Leiter 2 (oder umgekehrt). Diese Definition gilt unabhängig vom Masssystem.

Im SI wird also C in $\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}$ gemessen. Die entsprechen-

die Kapazitätseinheit wird zu Ehren von Michael Faraday Farad genannt. Wenn man die Ladung von 1 Clb vom Leiter 1 zum Leiter 2 transferiert und dabei eine Potentialdifferenz von 1 Volt entsteht, dann beträgt die Kapazität 1 Farad.

Interessant ist die Dimension der Kapazität im absoluten elektrostatischen Masssystem (e.s.u.). Definitionsgemäss wird hier C gemessen in $\frac{\text{statclb}}{\text{statvolt}}$. Mit $\text{statvolt} = \frac{\text{erg}}{\text{statclb}}$ wird $[C] = \frac{\text{statclb}^2}{\text{erg}}$. Diese Dimension lässt sich vereinfachen durch Betrachtung des Coulomb'schen Gesetzes. Wir schreiben es in der Form $\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = r$, um einzusehen, dass $\frac{\text{statclb}^2}{\text{erg}} = \text{cm}$. Die Masseinheit der Kapazität in e.s.u. ist der Zentimeter. Dies ist eine Manifestation der Tatsache, dass die Kapazität eine rein geometrische Angelegenheit ist (zum mindesten dann, wenn sich keine Materie im elektrischen Felde befindet).

Die Umrechnung von Farad in cm: Gegeben sei eine physikalische Anordnung von zwei Leitern 1 und 2, die folgendermassen beschaffen ist: Wenn 1 Coulomb vom Leiter 1 weggenommen und auf den Leiter 2 gebracht wird, entstehe eine Potentialdifferenz von 1 Volt. Die Kapazität der Leiter gegeneinander ist also 1 Farad. Nun ist $1 \text{ Clb} = 3 \cdot 10^9 \text{ statclb}$ und $1 \text{ Volt} = \frac{1}{300} \text{ statvolt}$. Man kann damit die obige Tatsache auch folgendermassen formulieren:

$3 \cdot 10^9 \text{ statclb}$ von 1 nach 2 transportiert geben die Potentialdifferenz $\frac{1}{300} \text{ statvolt}$

Also ist die Kapazität in e.s.u. $C = \frac{3 \cdot 10^9}{300} \text{ cm} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$, d.h.

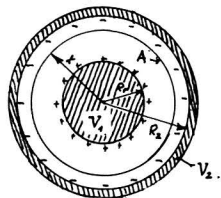
$$\underline{1 \text{ Farad} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}}$$

Der Kondensator

Unter einem "Kondensator" versteht man eine Anordnung von zwei Leitern, die so beschaffen ist, dass der grösste Teil des Flusses des elektrischen Feldes auf einem kurzen Weg vom Leiter 1 zum Leiter 2 gelangt. Zwei leitende Kugeln, deren Abstand grösser ist als ihr Durchmesser, werden kaum als Kondensator klassifiziert. Zwei parallele Metallplatten, deren Abstand klein ist im Vergleich zum Durch-

messen, sind hingegen ein gutes Beispiel für einen Kondensator. Wir geben im folgenden die Berechnung der Kapazität für einige wichtige Kondensatoranordnungen.

① Der Kugelkondensator.



Der Leiter (1) sei eine Kugel vom Radius R_1 und der Leiter (2) eine konzentrische Hohlkugel vom Innenradius R_2 . (Der Außenradius spielt bei unserer Betrachtung keine Rolle).

Zur Abwechslung rechnen wir in e.s.u.

1. Schritt: Wir denken uns die Ladung Q vorgegeben und berechnen das elektrische Feld mit dem Integralsatz von Gauss. Auf der Oberfläche der inneren Kugel sei die Ladung $+Q$. Auf der Innenfläche der äußeren Kugel ist dann die Ladung $-Q$. Ausserhalb R_2 herrscht kein Feld, da der Kondensator als Ganzes keine resultierende Ladung hat. Nur im Raume zwischen den Kugeln herrscht ein Feld. Als Integrationsfläche A wählen wir eine konzentrische Kugel vom Radius r . Es ist dann (vgl. S. 23)

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q, \text{ also } E(r) = \frac{Q}{r^2}.$$

2. Schritt: Durch Berechnung des Linienintegrals der Feldstärke erhält man die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ zwischen den Leitern. Das Linienintegral ist unabhängig vom Weg. Am bequemsten integriert man radial: $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2} dr = Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

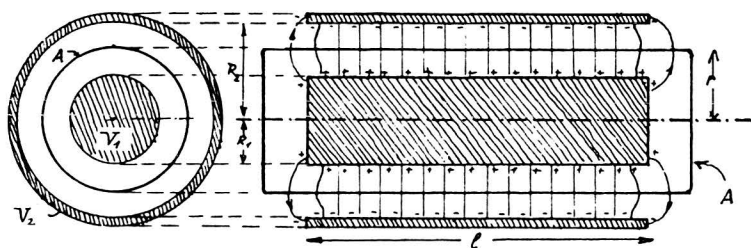
3. Schritt: Man verwendet die Definition der Kapazität von S. 38

$$C = \frac{|Q|}{|V_1 - V_2|} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad \text{e.s.u.} \quad \text{Im SI ist} \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Für $R_2 \gg R_1$ ist also $C \approx R_1$ e.s.u. Im absoluten elektrostatischen Masssystem ist die Kapazität einer in der Mitte des Hörsaales aufgehängten Kugel gegen die Wände des Hörsaaes in sehr guter Näherung gleich dem Radius der Kugel.

② Der Zylinderkondensator

Der Leiter 1 sei ein Kreiszylinder vom Radius R_1 und der Leiter 2 ein koaxialer Hohlzylinder vom Innenradius R_2 . Die Kapazitätsberechnung verläuft ganz analog zum Beispiel ①. Als Integrationsfläche A denkt man sich einen koaxialen Kreiszylinder vom Radius r , der den Leiter 1 umschließt und an den Enden mit je einem Deckel verschlossen ist.



Im Gegensatz zum Kugelkondensator lässt sich hier das Flächenintegral $\iint \vec{E} \cdot d\vec{f}$ nicht ohne weiteres exakt geschlossen berechnen; denn an den beiden Enden des Zylinderkondensators verläuft das elektrische Feld nicht mehr radial und ist sehr schwierig zu berechnen. Nur für den Fall $R_2 - R_1 \ll l$ tragen die Enden wenig zum Flächenintegral bei. Entsprechend ist dann auch das Feld zwischen den Zylindern durch die Randeffekte wenig gestört, und es gilt

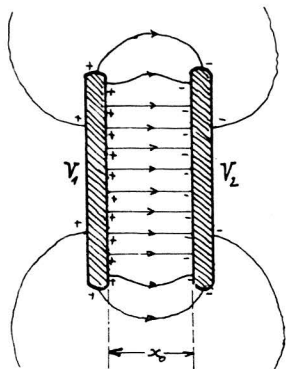
$$\frac{1}{\epsilon_0} Q = \iint \vec{E} \cdot d\vec{f} \approx 2\pi r l E(r), \text{ also } E(r) \approx \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r l} \quad (SI)$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \approx \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr \approx \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}; \text{ also ist}$$

$$\boxed{C \approx \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}} \text{ im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{C \approx \frac{l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}} \text{ in e.s.u. (cm)}$$

③ Der Plattenkondensator

Die beiden Leiter sind parallele Platten mit der Fläche A und dem Abstand x_0 . Ähnlich wie im Beispiel ② lässt sich der exakte Wert der Kapazität nicht in geschlossener Form darstellen, weil der Feldverlauf an den Rändern kompliziert ist. Nur wenn der Plattenabstand klein ist im Vergleich zum Plattendurchmesser,



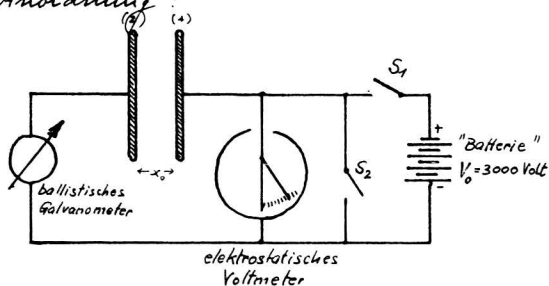
ist der Feldfluss zwischen den Platten konzentriert. Das Feld ist dort in guter Näherung homogen, und die Feldstärke beträgt nach S.32 $E \approx \frac{V_1 - V_2}{x_0}$. Der Betrag der Oberflächenladungsdichte auf der Innenseite ist

$$\sigma = \epsilon_0 E \approx \epsilon_0 \frac{|V_1 - V_2|}{x_0}. \text{ Die Ladung des Kondensators ist damit } Q \approx \epsilon_0 \frac{|V_1 - V_2|}{x_0} A \text{ und die Kapazität } \boxed{C \approx \epsilon_0 \frac{A}{x_0}} \text{ im SI und } \boxed{C \approx \frac{A}{4\pi x_0}} \text{ e.s.u.}$$

Ist der exakte Wert grösser oder kleiner als das Ergebnis der obigen Approximationen? Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten: Einerseits nimmt die Feldflussdichte zwischen den Platten ab gegen die Ränder, andererseits verläuft noch Feldfluss von einer Aussenseite zur anderen. Die exakte Rechnung gibt eine grössere Kapazität als die Approximation des homogenen Feldes zwischen den Platten. Auch beim Zylinderkondensator ist die Kapazität wegen den "Randeffekten" grösser als oben berechnet wurde.

Demonstrationsexperimente mit dem Plattenkondensator:

Anordnung:



Statt dass man mittels eines Klebestreifens Ladung vom Leiter (1) wegnimmt und zum Leiter (2) bringt, kann man den Leitern eine Potentialdifferenz V_0 erteilen, indem man sie mit den Polen einer "Batterie" verbindet.

- ① Der Kondensator wird aufgeladen durch Schliessen des Schalters S_1 . Die Ladung Q wird mit dem ballistischen Galvanometer gemessen. Das elektrostatische Voltmeter zeigt die Spannung (Potentialdifferenz) V_0 an. Wird der Schalter S_1 geöffnet, dann bleibt die Potentialdifferenz V_0 bestehen, denn es gibt dann keinen Weg, auf welchem Ladung von

- der einen Kondensatorplatte zur andern gelangen kann
- ② Wird nun der Schalter S_2 geschlossen, dann fliesst die Ladung Q in umgekehrter Richtung durch das ballistische Galvanometer. Der Kondensator "entlädt" sich.
- ③ Da C proportional zu $1/x_0$ ist, sind die Ausschläge des ballistischen Galvanometers umso grösser, je näher die Platten beisammen sind.
- ④ Nähert man die Platten bei angeschalteter Batterie, dann wird die Kondensatorladung grösser. Die Batterie wird etwas entladen. Zieht man hingegen die Platten auseinander, dann nimmt die Ladung des Kondensators ab und die Batterie wird etwas geladen. (Man stelle sich etwa einen Bleiakкумуляtor vor.)
- ⑤ Wenn man den Schalter S_1 nach dem Aufladen des Kondensators öffnet, dann bleibt die Kondensatorladung Q konstant. Verkleinert man nun die Kapazität C durch Auseinanderziehen der Platten, dann steigt die Potentialdifferenz zwischen denselben, da $V = \frac{Q}{C}$

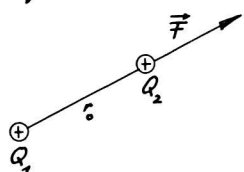
1.10. Die elektrostatische Energie

In einem geladenen Kondensator ist Energie gespeichert (Demonstrationen): Geeignete Kondensatoren können für kurze Zeit einen kleinen Elektromotor treiben, eine kleine Lampe aufleuchten lassen, oder gar einen Eisendraht verdampfen. Zur Speicherung grosser Energiemengen sind sie jedoch gänzlich ungeeignet. Selbst ein Bleiakкумуляtor kann viel mehr Joule pro kg Gewicht speichern als der beste Kondensator.

1.10.1. Der Sitz der elektrostatischen Energie.

Betrachte eine feste Ladung $+Q$, und eine zweite, bewegliche La-

dung + Q_2 im Abstand r_0 . In diesem System steckt potentielle Energie



gie: Wenn die Ladung Q_2 ins unendlich ferne verschoben wird, leistet sie die Arbeit

$$\int_{r_0}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r_0}$$

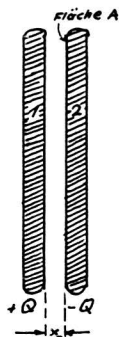
Wo ist der Sitz der potentiellen Energie? (dieses Problem ist nicht so einfach wie im Falle des Federkraftfeldes, das in Physik I S. 73/74 diskutiert wurde: dort war der Sitz der potentiellen Energie ganz eindeutig in der Feder.)

Die richtige Antwort ist Der Sitz der elektrostatischen Energie ist im elektrostatischen Felde. Im Beispiel der beiden Ladungen Q_1 und Q_2 erstreckt sich das Feld über den ganzen Raum. Wenn sich die Ladung Q_2 verschiebt, dann verändert sich das Feld im ganzen Raum, und zwar ist die Abnahme der totalen Feldenergie gleich der mechanischen Arbeit, die von der Ladung Q_2 beim Verschieben abgegeben wird. Wir werden zeigen, dass die Energie, die in jedem Volumenelement $d\vec{r}$ des felddurchflossenen Raumes steckt, gegeben ist durch $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\vec{r}$ im SI und $\frac{1}{8\pi} E^2 d\vec{r}$ in c.s.u. beträgt

Am Beispiel der Elektrostatik kann man nicht beweisen, dass die Energie im Felde steckt. Wir wissen aber, dass uns die Sonne durch den leeren Raum hindurch elektromagnetische Wellen, Licht, zustrahlt. Eine elektromagnetische Welle besteht aber aus elektrischen und magnetischen Feldern. Also müssen diese Energie enthalten!

1.10.2. Die Energiedichte des elektrischen Feldes

Wenn man akzeptiert, dass die Energie im Felde steckt, lässt sich die Energiedichte auf einfache Weise durch Betrachtung der in einem Kondensator gespeicherten elektrischen Arbeit herleiten.



Betrachte einen Plattenkondensator der Kapazität C , der auf die Spannung $V = V_1 - V_2$ aufgeladen wurde, indem die Ladung $-Q$ von der Platte 1 weggenommen und auf die Platte 2 gebracht wurde. Nach der Definition der Kapazität ist $Q = CV$. Um nun eine zusätzliche infinitesimale Ladung $-dQ$ von 1 nach 2 zu transportieren, muss nach S. 18 die Arbeit $dW_{12} = V dQ$ aufgewendet werden. Bei unveränderter Geometrie der Anordnung ist $dQ = C dV$, sodass $dW_{12} = C V dV$. Die gesamte Arbeit, die zum Aufladen des ursprünglich ungeladenen Kondensators auf die Spannung V aufgewendet werden muss, ist damit gegeben durch

$$\boxed{W = \int dW_{12} = \int_0^V C V dV = \frac{1}{2} C V^2} \quad \text{und mit } Q = C V \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

(Da die Definition der Kapazität nicht vom Masssystem abhängt, gelten diese Formeln sowohl im SI als auch in e.s.u.) Diese Energie W steckt im Felde. Um das Problem nicht unnötig zu komplizieren betrachten wir einen Plattenkondensator, bei dem der Plattenabstand x_0 klein ist im Vergleich zum Plattendurchmesser. Der Feldfluss ist dann zwischen den Platten konzentriert, und das Feld darf als homogen betrachtet werden. Ebenfalls homogen ist dann die Energiedichte w des Feldes. Bei einem Plattenabstand x_0 und einer Plattenfläche A ist dann die totale Feldenergie $W = x_0 A w$. Dies ist nun gleichzusetzen der oben berechneten Aufladearbeit $W = \frac{1}{2} C V^2$, wobei nach S. 32 $V = E x_0$ und nach S. 42 $C = \epsilon_0 \frac{A}{x_0}$. Damit wird

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{x_0} E^2 x_0^2 = x_0 A w, \quad \text{woraus} \quad \boxed{w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad \text{im SI}$$

$$\boxed{w = \frac{1}{8\pi} E^2} \quad \text{in e.s.u.}$$

Beispiele und Anwendungen

① Energie des Feldes einer Punktladung:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad w(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{Q^2}{r^4}; \quad \text{es ist also } \frac{1}{r^4} \text{ über}$$

den ganzen Raum zu integrieren. Als Volumenelemente wählt man Kugelschalen, sodass

$$\iiint \frac{1}{r^4} d\tau = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

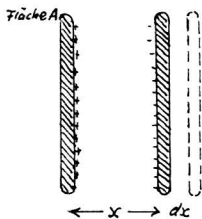
Dieses Integral divergiert und zwar wegen der unteren Grenze.

Das Feld einer Punktladung hätte nach dieser Rechnung unendlich grosse Energie. Allerdings haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass das $1/r^2$ Gesetz bis zum Abstand null hinunter noch gelte (vgl. S. 14).

② Anziehung der Platten eines geladenen Kondensators.

Die Oberflächenladungen auf den Platten 1 und 2 haben entgegengesetztes Vorzeichen und ziehen sich deshalb an. Da sie nicht aus der Platte austreten können, wird die Kraft auf die Platte übertragen. Sie soll berechnet werden für zwei Fälle:

a) Konstant gehaltene Ladung Q_0 : Der Kondensator wurde z.B. mittels einer Batterie der Spannung V_0 aufgeladen. Dann wurde die Batterie vom Kondensator abgeschaltet. Die Ladung $Q = Q_0$ des Kondensators bleibt dann konstant, auch wenn eine Änderung der geometrischen Anordnung, z.B. eine Vergrößerung des Plattenabstandes, vorgenommen wird; denn der Leitungsweg von einer Platte zum andern ist unterbrochen.



Die Anziehungskraft zwischen den Platten erhält man durch eine einfache Energiebetrachtung: Die mechanische Arbeit, die aufgewendet werden muss, um den Plattenabstand zu vergrößern, wird in elektrische Feldenergie umgewandelt:

$$dW_{\text{mech.}} = F dx = dW_{\text{elektr.}} = d\left(\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}\right) = \frac{1}{2} Q_0^2 d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2} Q_0^2 d\left(\frac{x}{\epsilon_0 A}\right) = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 A} dx$$

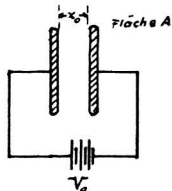
also $F = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 A}$ in SI. Im e.s.u. wäre $F = \frac{2\pi Q_0^2}{A}$

Die Kraft ist unabhängig vom Plattenabstand! Selbstverständlich gilt dies nur, wenn das Feld zwischen den Platten als homogen betrachtet werden darf.

Näherungsweise trifft dies zu, wenn der Plattenabstand sehr klein ist gegenüber dem Plattendurchmesser.

Selbstverständlich steht die Unabhängigkeit der Kraft vom Plattenabstand nicht im Widerspruch mit dem Coulomb'schen Gesetz. (Ein Oberflächenladungselement auf der Platte (1) wird nicht nur vom unmittelbar gegenüberliegenden Ladungselement auf der Platte (2) angezogen, sondern von allen Ladungselementen auf der Platte (2). Die korrekt aufsummierten Kraftvektoren ergeben eine abstandsunabhängige Resultierende! Unsere Energiebetrachtung ist allerdings etwas einfacher.)

b) Konstant gehaltene Potentialdifferenz V_0 .



Die Batterie bleibt nun angeschaltet. Damit bleibt Q nicht konstant beim Ändern des Plattenabstandes:

$$Q = C V_0 = \epsilon_0 \frac{A}{x} V_0 \quad \text{diesen Wert müssen wir}$$

nun an Stelle von Q_0 in der oben hergeleiteten Formel für die Kraft einsetzen:

$$\boxed{F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_0 A}{2} \cdot \frac{V_0^2}{x^2}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{F = \frac{A}{8\pi} \cdot \frac{V_0^2}{x^2}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Die $1/x^2$ -Abhängigkeit kommt daher, dass beim Zusammenrücken der Platten die Ladung derselben zunimmt (Experiment ④ S. 43).

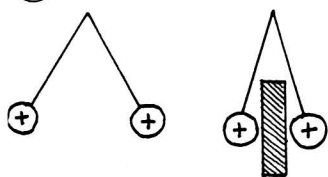
Das obige Ergebnis lässt sich auch durch eine Energiebetrachtung gewinnen. Wesentlich ist dabei, dass die angeschaltete Batterie einbezogen wird. Man stelle sich einen Akkumulator vor. Beim Auseinanderziehen der Kondensatorplatten wird er ein wenig aufgeladen und beim Zusammenrücken ein wenig entladen. Vgl. S. 43.

Die Anziehung zweier Kondensatorplatten kann zur absoluten Messung einer Potentialdifferenz benutzt werden. Die Einrichtung dazu ist die Thomson Waage (William Thomson, Lord Kelvin 1824-1907).

1.11. Nichtleitende Materie im elektrostatischen Feld

1.11.1. Demonstrationsexperimente zur Einleitung

- ① Ein Stück eines isolierenden Materials, ein sog.



Dielektrikum, werde zwischen zwei Christbaumkugeln gehalten, die Ladungen (desselben Vorzeichens) tragen. Das Dielektrikum sei ungeladen. Man beobachtet eine deutliche Abnahme der Abstossungskraft zwischen den beiden Kugeln.

- ② Ein Dielektrikum wird zwischen die Platten eines Kondensators gebracht.

Beobachtungen:

a) Ist der Kondensator an eine Batterie angeschlossen, dann fließt beim Einschieben des Dielektrikums noch mehr Ladung auf die Platten.

b) Hält man die Ladung des Kondensators konstant (Batterie wird nach dem Laden abgeschaltet), dann sinkt die Potentialdifferenz beim Einschieben des Dielektrikums.

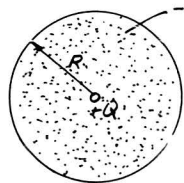
Folgerung: Die Kapazität ist grösser geworden.

Eine wichtige Feststellung ist die, dass die Kapazitätsvergrößerung vom Material des Dielektrikums abhängt. Dies bedeutet, dass man den Effekt nur verstehen kann, wenn man etwas weiss über den Aufbau der Materie.

1.11.2. Induzierte elektrische Dipole.

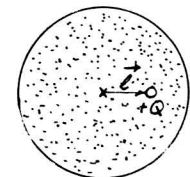
Die Materialien sind aus Atomen aufgebaut. Bringen wir einen nichtleitenden Körper, ein sog. Dielektrikum, in ein elektrisches

Feld \vec{E} , dann sind auch seine Atome in einem elektrischen Felde. Die Feldstärke am Orte der Atome ist verschieden von derjenigen ausserhalb des Dielektrikums. Der Unterschied hängt von der Anordnung im Dielektrikum ab. Wesentlich ist für uns hier nur, dass das äussere Feld ein inneres Feld am Orte der Atome hervorruft. Ein stark vereinfachtes Atommodell diene zur Illustration des Einflusses eines (homogenen) elektrischen Feldes auf das Atom. Wir rechnen im e.s.u., wie es in der Atomphysik noch üblich ist.

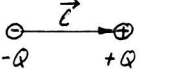


-Q Vereinfachend nehmen wir an, dass die Elektronenwolke des Atoms eine homogene Kugelladung $-Q$ vom Radius R sei. In diese homogene Kugelladung sei, freibeweglich, der Atomkern mit der Ladung $+Q$ eingebettet. Der Atomradius R ist von der Grössenordnung 10^{-8} cm, und der Kernradius beträgt rund 10^{-13} cm. Der Kern kann damit als Punktladung approximiert werden. Nach S. 24 erzeugt die homogene Kugelladung eine Feldstärke \vec{E}_i , die im Innern proportional zum Abstand \vec{r} vom Zentrum ist:

$\vec{E}_i = -\frac{Q}{R^3} \vec{r}$. Der positiv geladene Kern wird also mit der Kraft $\vec{F} = +Q\vec{E}_i = -\frac{Q^2}{R^3} \vec{r}$ in das Zentrum gezogen. Wenn keine anderen elektrischen Felder herrschen, ist also seine Gleichgewichtslage im Zentrum. Wird nun das Atom in ein äusseres elektrisches Feld \vec{E} gebracht, dann wirken auf Elektronenwolke und Kern entgegengesetzt gleiche Kräfte: $\vec{F} = \pm Q\vec{E}$. Damit wird der Kern gegen das Zentrum der Ladungswolke verschoben. Die neue Gleichgewichtslage \vec{r} ist dort, wo die rücktreibende Kraft $\vec{F} = -\frac{Q^2}{R^3} \vec{r}$ der Kraft, die vom äusseren Felde herrührt, die Waage hält: $-\frac{Q^2}{R^3} \vec{r} + Q\vec{E} = 0$. Die Verschiebung \vec{r} des Kerns aus seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage ist in normalen Dielektrika bei den üblichen Feldstärken sehr klein, rund $10^{-5} R$.



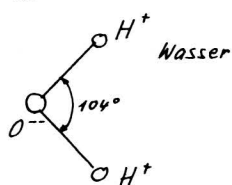
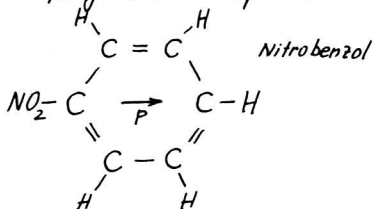
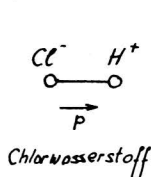
Solange der Kern im Zentrum des Atoms ist, erzeugt dieses kein elektrisches Feld im

Raume $r > R$ Sobald sich aber der Kern verschiebt, d.h. wenn das Atom "polarisiert" wird, stimmt diese Aussage nicht mehr. Das vom polarisierten Atom erzeugte \vec{E} -Feld lässt sich leicht angeben für $r > R$: Für einen Punkt ausserhalb der Elektronenwolke wirkt diese wie eine Punktladung $-Q$ im Zentrum (S. 23). Demselben Felde superponiert sich noch das Feld des verschobenen Kernes, den wir als Punktladung $+Q$ betrachten dürfen. Das polarisierte Atom erzeugt also ein E -Feld  das gleich ist dem Felde zweier entgegengesetzt gleich-
 $-Q$ $+Q$ cher Punktladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstand l .
 Man nennt ein solches Gebilde einen elektrischen Dipol mit dem Moment $\boxed{\vec{p} = \vec{l} Q}$ (Beachte, dass \vec{l} von der negativen zur positiven Ladung zeigt).

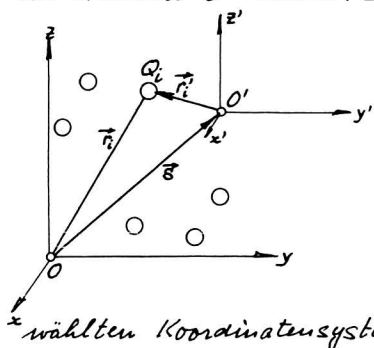
Im betrachteten Beispiel handelte es sich um einen induzierten Dipol, denn er entsteht erst beim Einschalten des äusseren Feldes \vec{E} . Nach S. 49 ist $\vec{l} Q = R^3 \vec{E}$, also $\vec{p} = R^3 \vec{E}$. Grössenordnungsmässig stimmt dies mit der Erfahrung überein. Im allgemeinen führt man eine Polarisierbarkeit α ein durch die Beziehung $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Nach unserer Betrachtung ist die Grössenordnung von α diejenige des Atomvolumens, nämlich 10^{-24} cm^3 .

1.11.3. Permanente elektrische Dipole.

Es gibt Moleküle, die ein Dipolmoment haben, auch wenn kein elektrisches Feld auf sie einwirkt. Man spricht dann von "permanenten Dipolen" und von "polaren Molekülen". Das permanente elektrische Dipolmoment ist eine Folge der Asymmetrie der Molekülstruktur, wie folgende Beispiele illustrieren



Es ist nicht offensichtlich, in welcher Hinsicht die skizzierten Moleküle (mit Ausnahme von HCl) äquivalent sein sollen zum Dipol im vorhergehenden Abschnitt, der aus zwei Punktladungen $\pm Q$ im Abstand ℓ besteht. Zur Abklärung dieses Problems betrachten



wir ein Molekül, das aufgebaut sei aus positiven und negativen Ionen an den Orten \vec{r}_i mit den Punktladungen Q_i . Das Molekül habe keine resultierende Ladung, d.h. $\sum_i Q_i = 0$. Das erste Moment der Ladungsverteilung bezüglich des Ursprungs O eines willkürlich ge-

wählten Koordinatensystems ist definiert als $\vec{p}_O = \sum_i \vec{r}_i Q_i$.

Wenn das Molekül keine resultierende Ladung hat, ist dieses erste Moment unabhängig vom Bezugspunkt: Betrachte ein zweites Koordinatensystem, dessen Ursprung O' am Orte \vec{s} bezogen auf das erste System liege. Das erste Moment bezüglich des neuen Ursprungs O' ist $\vec{p}_{O'} = \sum_i \vec{r}'_i Q_i$, wobei $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{s}$. Damit ist

$$\vec{p}_{O'} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{s}) Q_i = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i Q_i}_{\vec{p}_O} - \vec{s} \underbrace{\sum_i Q_i}_0 = \vec{p}_O = \vec{p}$$

Dieses vom Bezugspunkt unabhängige erste Moment der Ladungsverteilung berechnet man als Dipolmoment \vec{p} . (Zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen stellen den einfachsten Spezialfall dar.)

Nun setzen wir das Molekül in ein homogenes elektrisches Feld \vec{E} und betrachten die wirkenden Kräfte. Gemäss der Definition des elektrischen Feldes (S.16) wirkt auf die Ladung Q_i die Kraft $\vec{F}_i = \vec{E} Q_i$. Die resultierende Kraft auf das Molekül verschwindet: $\vec{F}_{\text{res}} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{E} \underbrace{\sum_i Q_i}_0 = 0$. Das resultierende Moment der Kräfte ver-

schwindet hingegen im allgemeinen nicht. Bezüglich O hat man

$$\vec{M}_{O, \text{res}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{E} Q_i = \left(\sum_i \vec{r}_i Q_i \right) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

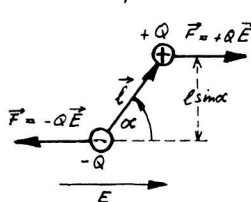
Dieses mechanische Moment ist unabhängig vom Bezugspunkt, wenn die resultierende Ladung verschwindet. Es entspricht einem Kräftepaar (Physik I S.125).

$$\vec{M}_{0, \text{res}} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{s}) \times \vec{E} Q_i = \underbrace{\left(\sum_i \vec{r}_i Q_i \right)}_{\vec{P}} \times \vec{E} - (\vec{s} \times \vec{E}) \underbrace{\sum_i Q_i}_0 = \vec{P} \times \vec{E}$$

Das Drehmoment, das ein polares Molekül in einem gegebenen homogenen Felde \vec{E} erfährt, hängt nur vom Dipolmoment \vec{P} ab, gleichgültig, wie dieses zustande kommt:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}} \quad (\text{SI und e.s.u.})$$

Wegen dem Drehmoment \vec{M} hat der Dipol eine potentielle Energie der Drehung. Nach den obigen Überlegungen darf man mit dem einfachen Dipolmodell rechnen. Die potentielle Energie



$W_{\text{pot}}(\alpha)$ ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Dipol aus der Orientierung senkrecht zum Felde ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) in die allgemeine Orientierung α dreht. Mit $dW = M(\alpha) d\alpha$ wird

$$W_{\text{pot}}(\alpha) = \int_{\pi/2}^{\alpha} M(\alpha) d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} p E \sin \alpha d\alpha = -p E \cos \alpha, \text{ also}$$

$$\boxed{W_{\text{pot}} = -\vec{P} \cdot \vec{E}}$$



Die permanenten Dipolmomente p von einfachen polaren Molekülen sind von der Grössenordnung des Produktes aus dem Atomradius (10^{-8} cm) und der Ladung des Elektrons ($4.8 \times 10^{-10} \text{ statcbb}$), d.h. von der Grössenordnung $10^{-18} \text{ cm statcbb}$. In der chemischen Literatur wird das elektrische Dipolmoment von $10^{-18} \text{ cm statcbb}$ 1 Debye genannt.

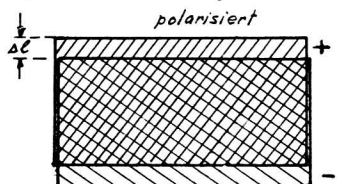
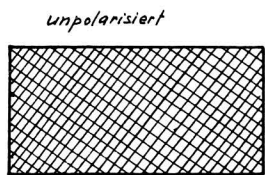
1.11.4. Die dielektrische Polarisation

Wenn ein Dielektrikum sich in einem elektrischen Felde \vec{E} befindet, werden in den Atomen elektrische Dipole induziert. Wenn das Dielektrikum orientierbare, permanente elektrische Dipole enthält, werden diese durch das auf sie wirkende Drehmoment ausgerichtet. Der erste Mechanismus, die Po-

larisierung der Atome ist im allgemeinen nahezu unabhängig von der Temperatur. Hingegen wirkt die thermische Bewegung der Ausrichtung der permanenten Dipole entgegen, sodass der Ausrichtungsgrad stark temperaturabhängig ist. Beide Mechanismen haben aber folgendes gemeinsam: Die positiven Ladungen werden im Mittel etwas in der Richtung des Feldes \vec{E} verschoben und die negativen Ladungen in der Gegenrichtung. Man sagt: Das Dielektrikum wird polarisiert.

Der phänomenologische Standpunkt.

Man schaut nicht so genau hin, dass man die atomare bzw. molekulare Struktur "sieht". Das Dielektrikum kann dann aufgefasst werden als Superposition einer homogenen, positiven Raumladung  und einer gleich dichten, negativen Raumladung . Im unpolarisierten Dielektrikum liegen die beiden Raumladungen genau im selben Raum, und im polarisierten Dielektrikum sind sie gegeneinander verschoben um eine Strecke Δl , die im allgemeinen klein ist im Vergleich zu einem Atomradius ($\Delta l \ll 10^{-8} \text{ cm}$). Vom phänomenologischen



Standpunkt aus manifestiert sich die Polarisation des Dielektrikums lediglich

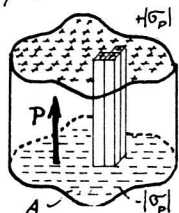
durch das Auftreten einer Oberflächenladung. Wir nennen sie hier Polarisationsladung und bezeichnen ihre Flächendichte mit σ_P . In der älteren Literatur wird diese Ladung als freie Ladung bezeichnet. Diese Bezeichnung ist etwas irreführend; denn diese Oberflächenladungen sind nicht frei. Sie gehören zu den Atomen bzw. Molekülen des Materials. Auch wenn das Dielektrikum die Platten des Kondensators berührt, fließen die Polarisationsladungen nicht auf diese hinüber (vgl. Experiment ② S. 48).

Beachte, dass wir uns hier auf homogene Polarisation beschränkt

haben. Bei inhomogener Polarisation können im Innern des Dielektrikums Polarisations-Raumladungen auftreten.

Die Verbindung mit dem atomaren Standpunkt.

Nach S. 51 ist das Dipolmoment eines Systems definiert als $\vec{p} = \sum \vec{r}_i \cdot Q_i$. Betrachte nun als System ein polarisiertes Dielektrikum. Vom atomaren Standpunkt aus kann also sein Dipolmoment aufgefasst werden als Vektorsumme der Dipolmomente der polarisierten Atome und polaren Moleküle. Phänomenologisch ist es das Dipolmoment der Polarisationsladungen, bei homogener Polarisation insbesondere das Dipolmoment der Oberflächenladungen. Betrachte als Beispiel einen homogen längs seiner Achse polarisierten, geraden Zylinder mit der Grundfläche A und der Höhe h . Er kann aufgefasst werden als Bündel von polarisierten Stangen vom Querschnitt $d\vec{f}$ und der Länge h . Jede Stange hat ein längs der Zylinderachse gerichtetes Dipolmoment vom Betrag $h d\vec{f} \cdot \vec{\sigma}_P$. Das resultierende Dipolmoment des Zylinders ist auch längs seiner Achse gerichtet und hat den Betrag $h A \sigma_P = v \sigma_P$, wobei v das Volumen des Zylinders bedeutet.

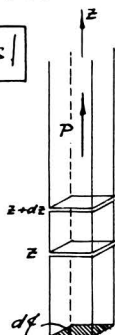


Als Polarisation \vec{P} definiert man das Dipolmoment pro Volumen. Im Beispiel ist $|\vec{P}| = |\sigma_P|$. Der allgemeine Zusammenhang zwischen der Flächendichte σ_P der Polarisationsladungen und dem Polarisationsvektor \vec{P} an der Oberfläche eines Dielektrikums ist offensichtlich folgender:

$$|\sigma_P| = |\text{Normalkomponente des Polarisationsvektors}|$$

Inhomogene Polarisation.

Betrachte zunächst eine längs ihrer Achse z polarisierte Stange vom infinitesimalen Querschnitt $d\vec{f}$. Aus irgend einem Grunde hänge die Polarisation von z ab. Man sich z.B. vorstellen, dass



das Material inhomogen ist. Wir denken uns ein Volumenelement $d\vec{r}$ zwischen z und $z+dz$. Beim Prozess der Polarisierung tritt durch die Deckfläche bei $z+dz$ die Polarisationsladung $\sigma_p d\vec{f} = P(z+dz) d\vec{f}$ in das darüberliegende Volumen aus. Dafür tritt durch die Grundfläche, vom darunterliegenden Volumen kommend, die Polarisationsladung $\sigma_p' d\vec{f} = P(z) d\vec{f}$ in $d\vec{r}$ ein. Die Zunahme der Ladung in $d\vec{r}$ ist

$$dQ = (P(z) - P(z+dz)) d\vec{f} = -\frac{dP}{dz} dz d\vec{f} = -\frac{dP}{dz} d\vec{r}$$

Wenn man nicht genau hinschaut (im Sinne der phänomenologischen Betrachtungsweise) entspricht dies einer Ladungsdichte

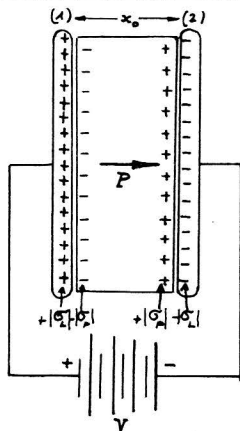
$$\rho_{\text{Pol}} = \frac{dQ}{d\vec{r}} = -\frac{dP}{dz}$$

die Verallgemeinerung auf ein Vektorfeld $\vec{P}(x, y, z)$ ist offensichtlich: die x -Komponente verursacht eine Raumladungsdichte von $\frac{\partial P_x}{\partial x}$, die y -Komponente $\frac{\partial P_y}{\partial y}$ und die z -Komponente $-\frac{\partial P_z}{\partial z}$, sodass

$$\rho_{\text{Pol}} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right), \text{ also } \boxed{\rho_{\text{Pol}} = -\text{div } \vec{P}}$$

Die Polarisierung \vec{P} ist eine rein phänomenologische Grösse. Dies geht schon aus ihrer Definition hervor, die eine Mittelung über viele atomare bzw. molekulare Dipolmomente impliziert.

1.11.5. Phänomenologische Charakterisierung eines dielektrischen Materials.



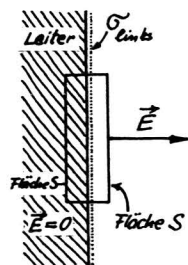
Warum wird die Kapazität eines Plattenkondensators grösser, wenn ein Dielektrikum zwischen die Platten geschoben wird?

Betrachte einen Plattenkondensator, der an eine Batterie mit der Spannung V angeschlossen ist. Der Raum zwischen den Platten sei ganz vom Dielektrikum ausgefüllt, d.h. der Spalt zwischen Dielektrikum und Leiter sei unendlich schmal. Die linke Kondensator-

platte hat die Oberflächenladungsdichte $+\sigma_L$ und die rechte Platte die Oberflächenladungsdichte $-\sigma_L$. Die Batterie hat Leitungselektronen von der linken Platte auf die rechte Platte "gepumpt". Die Ladung, die bei diesem Prozess durch die Batterie hindurchgeflossen ist, beträgt $|Q| = |\sigma_L| A$, wobei A die Plattenfläche bedeutet. Diese Ladung bezeichnet man als die "Ladung des Kondensators".

Durch das elektrische Feld zwischen den Platten wird dem Dielektrikum eine Polarisation \vec{P} erteilt. Auf seiner linken Oberfläche liegt eine Polarisations-Oberflächenladung der Dichte $-\sigma_P$ und entsprechend rechts $+\sigma_P$. Es sei hier noch einmal betont, dass diese Oberflächenladung nicht auf die Kondensatorplatten überfließt, auch dann nicht, wenn diese das Dielektrikum berühren. Die totale Flächenladungsdichte links ist damit $\sigma_{links} = +\sigma_L - \sigma_P$ und rechts $\sigma_{rechts} = -\sigma_L + \sigma_P$.

Es ist die totale Flächenladungsdichte, die für das elektrische Feld \vec{E} verantwortlich ist. Wir berechnen die Feldstärke zwischen den Platten mit der auf S. 24 eingeführten Josenmethode. Im Leiter verschwindet das Feld (S. 25) und im Raum zwischen den Kondensatorplatten ist es homogen, sodass



$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{f} = S E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{links} S, \text{ also } E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{links}$$

Dasen-
oberfläche

(Nach Betrag und Vorzeichen hätte man dasselbe Feld erhalten, wenn man die rechte Seite betrachtet hätte. Man soll aber nicht auf die Idee kommen, die Feldstärke aus diesem Grunde zu verdoppeln. Dies wäre im Widerspruch zum Satz von Gauss!)

Die dielektrische Suszeptibilität χ und die Dielektrizitätskonstante ϵ .

Man kommt an dieser Stelle nicht weiter ohne Charakterisierung des dielektrischen Materials. Bei gewöhnlichen, isotropen Dielektrika und nicht zu grossen Feldstärken ist die dielektrische

Polarisation \vec{P} proportional zur Feldstärke \vec{E} . Man definiert eine dielektrische Suszeptibilität χ durch die Beziehung

$$\boxed{\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{P} = \chi \vec{E}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Nun ist

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{\text{Ges}} = \frac{1}{\epsilon_0} (|\sigma_L| - |\sigma_P|) = \frac{1}{\epsilon_0} (|\sigma_L| - |\rho_P|) = \frac{1}{\epsilon_0} (|\sigma_L| - \chi \epsilon_0 |E|), \text{ also}$$

$$|\sigma_L| = \epsilon_0 |E| (1 + \chi) \quad \text{und} \quad Q = |\sigma_L| A = \epsilon_0 |E| A (1 + \chi)$$

Für das homogene Feld zwischen den Platten gilt $|E| = \frac{V}{x_0}$, sodass

$$Q = \frac{\epsilon_0 V A}{x_0} (1 + \chi)$$

die Kapazität ist definiert als $C = \frac{Q}{V}$ (S. 38). Damit wird

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{x_0} (1 + \chi) \quad \text{im SI. In esu. erhält man } C = \frac{A}{4\pi x_0} (1 + 4\pi \chi)$$

Die Kapazität ist nun nicht mehr eine rein geometrische Angelegenheit, indem die Materialgrösse χ eingeht. Ohne Dielektrikum hätte man die rein geometrische Kapazität

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{x_0} \quad \text{im SI und} \quad C_0 = \frac{A}{4\pi x_0} \quad \text{in e.s.u. (S. 42).}$$

Das Verhältnis $\boxed{\epsilon = \frac{C}{C_0}}$ ist unabhängig vom Masssystem und wird Dielektrizitätskonstante genannt. Es ist

$$\boxed{\epsilon = 1 + \chi} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{\epsilon = 1 + 4\pi \chi} \quad \text{in e.s.u.}$$

Da $\chi > 0$ gemäss Definition, ist $\epsilon > 1$. Damit ist erklärt, warum die Kapazität eines Kondensators beim Einschoben eines Dielektrikums zunimmt. Man pflegt dielektrische Materialien durch die Dielektrizitätskonstante ϵ zu charakterisieren.

<u>Zahlwerte:</u>	<u>Medium</u>	<u>ϵ</u>
	Vakuum	1
	Luft bei 0°C und 760 mm Hg	1.000576
	NaCl Kristall	5.6
	Wasser	81
	gewisse TiO_2 enthaltende Keramiken	bis ca. 5000

Die dielektrische Verschiebung \vec{D} .

In der Literatur wird häufig ein Vektorfeld verwendet, das mit \vec{D} bezeichnet und "dielektrische Verschiebung" genannt wird. Das Feld \vec{D} ist folgendermassen definiert:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Das Glied \vec{P} stampelt \vec{D} zu einer rein phänomenologischen Grösse.

Die dielektrische Verschiebung ist nicht viel mehr als eine Rechengrösse, die wohl elegantere Formeln ermöglicht, aber zum Verständnis der Physik nicht viel beiträgt. Die dielektrischen Eigenschaften des Materials sind in der obigen Formel nicht explizit enthalten. Im Spezialfall der Proportionalität zwischen \vec{P} und \vec{E} (lineare Dielektrika) gilt:

SI	e.s.u.	
$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$	$\vec{P} = \chi \vec{E}$	Bei <u>isotropen</u> Medien ist $\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{D}$, sodass χ und ϵ als skalare Materialgrössen betrachtet werden. Bei anisotropen
$\vec{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E}$	$\vec{D} = (1 + 4\pi \chi) \vec{E}$	
$\boxed{\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}}$	$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$	

Medien sind χ und ϵ symmetrische Tensoren zweiter Stufe (vgl. Physik I, S. 144).

1.11.6. der Satz von Gauss im Dielektrikum.

Wir gehen aus von der Beziehung $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$. \vec{E} ist ein fundamentales Feld und keine blosse Rechengrösse. Dies zeigt sich darin, dass alle möglichen Ladungen zu ρ beitragen können, insbesondere auch die Polarisationsladungen. Diese sind in keiner Weise fiktiv. Sie sind z.B. dafür verantwortlich, dass die Kapazität eines Plattenkondensators zunimmt, wenn ein Dielektrikum zwischen die Platten geschoben wird (vgl. S. 55-57). Um diese Tatsache zu betonen, schreiben wir

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{total}}}$$

59

Zur Beleuchtung der Bedeutung der dielektrischen Verschiebung \vec{D} berechnen wir nun $\text{div } \vec{D}$. Aus der Definition

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{folgt} \quad \text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P}.$$

Mit $\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho_{\text{tot}}$ und $\text{div } \vec{P} = -\rho_{\text{pol}}$ (S. 55) wird

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{tot}} - \rho_{\text{pol}}} \quad \text{im SI und} \quad \boxed{\text{div } \vec{D} = 4\pi(\rho_{\text{tot}} - \rho_{\text{pol}})} \quad \text{im e.s.u.}$$

Wenn man den Satz von Gauss auf die dielektrische Verschiebung \vec{D} anwendet, muss man die Polarisationsladungen weglassen.

Selbstverständlich gilt dies nicht nur für Raumladungen, sondern auch für Oberflächenladungen. In der älteren Literatur wird die um die Polarisationsladung verminderte totale Ladung (einführend) als "wahre Ladung" bezeichnet. Die Kondensatorladung entspricht "wahrer Ladung" (S. 56). Mit $\rho_{\text{wahr}} = \rho_{\text{tot}} - \rho_{\text{pol}}$ und $\sigma_{\text{wahr}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{pol}}$ kann man also sagen: Die Quellen des Feldes \vec{D} sind die "wahren Ladungen".

Ein illustratives Beispiel:

Eine Metallkugel vom Radius R wird im Vakuum die Ladung $+Q$ erteilt. Dann wird die Kugel in ein homogenes, isotropes, unendliches Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ eingetaucht. Gesucht sind die Felder \vec{D} , \vec{E} und \vec{P} , sowie die Verteilung der Polarisationsladungen.



Symmetrie: Das System ist kugelsymmetrisch. \vec{D} , \vec{E} und \vec{P} sind radial gerichtet, und die Beträge hängen nur von r ab.

Das Feld \vec{D} ergibt sich aus der Beziehung $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{wahr}}$. Die "wahre" Ladung ist die über die Oberfläche der Kugel homogen verteilte Ladung $+Q$. Zur Berechnung

von \vec{D} im Abstand r vom Zentrum integrieren wir die Gleichung über das Volumen der konzentrischen Kugel vom Radius $r > R$

$$\iiint \text{div } \vec{D} \, d\tau = \iiint \rho_{\text{wahr}} \, d\tau = Q$$

Der Satz von Gauss aus der Vektoranalysis sagt $\iiint \operatorname{div} \vec{D} d\vec{r} = \iint \vec{D} \cdot d\vec{f}$, wobei sich das Oberflächenintegral in unserem Fall über die Kugel vom Radius r erstreckt (vgl. S. 22). Damit haben wir

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{f} = 4\pi r^2 D(r) = Q \quad \text{also} \quad D(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \text{für } r > R.$$

Für $r < R$ ist $D = 0$, da innerhalb R keine Ladung ist.

Das Feld \vec{E} ergibt sich bei einem linearen Materialgesetz (S. 57) aus der Beziehung $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ (S. 58) zu $E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$.

Man vergleiche dies mit dem Feld der Kugel im Vakuum, wo $E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$. Durch das Eintauchen der Kugel ins Dielektrikum ist die Feldstärke E ϵ -mal kleiner geworden.

Das Feld \vec{P} folgt dann aus $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ und $\chi = \epsilon - 1$:

$$P(r) = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E(r) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Die räumliche Dichteverteilung ρ_{pol} der Polarisationsladungen ergibt sich aus der Beziehung $\rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \vec{P}$. Man kann ohne Rechnung sagen, dass $\operatorname{div} \vec{P} = 0$ im Dielektrikum (obwohl das \vec{P} -Feld inhomogen ist). Im vorliegenden Fall verhält sich \vec{P} wie das Feld einer Punktladung. Der Fluss des \vec{P} -Feldes durch eine beliebige geschlossene Fläche verschwindet also, sofern diese ganz im Dielektrikum liegt und die geladene Metallkugel nicht umschließt (vgl. S. 22/23).

Die Flächendichte σ_p der Polarisationsladung an der Grenzfläche Leiter/Dielektrikum ergibt sich aus der Beziehung

$$|\sigma_p| = |P| = P(R) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{Q}{R^2}. \quad \text{Sie ist negativ nach den Überlegungen auf S. 53.}$$

Die totale Flächenladungsdichte an der Grenze Leiter/Dielektrikum ist

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{wahr}} + \sigma_{\text{pol}} = \frac{Q}{4\pi R^2} - \frac{\epsilon - 1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{Q}{R^2} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \text{also}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{\epsilon} \sigma_{\text{wahr}}$$

Die ursprüngliche Ladung wird durch das Eintauchen der Kugel in das Dielektrikum zum Teil durch die Polarisationsladungen kompensiert.

1.11.7. Energiebetrachtungen

Die elektrische Arbeit, die beim Aufladen eines Kondensators der Kapazität C auf die Spannung V geleistet wird, ist $W = \frac{1}{2} CV^2$. Wie die Herleitung (S. 45) zeigt, beruht diese Formel auf der ganz allgemeinen Definition der Kapazität als $C = \frac{Q}{V}$. Insbesondere gilt sie auch dann noch, wenn der Kondensator ein Dielektrikum enthält, das durch eine Dielektrizitätskonstante ϵ charakterisierbar ist (vgl. S. 56/57).

Betrachte einen Kondensator im Vakuum mit der Kapazität C_0 . (Bei einem Plattenkondensator z.B. wäre $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{x_0}$ nach S. 42). Wenn er auf die Spannung V aufgeladen ist, enthält er die Energie $W_0 = \frac{1}{2} C_0 V^2$. Sie steckt im elektrischen Felde, dessen Energiedichte gegeben ist durch $w_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$. Wenn derselbe Kondensator mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ϵ ausgefüllt ist, hat er die Kapazität $C = \epsilon C_0$, und wenn er auf dieselbe Spannung V aufgeladen ist, enthält er die Energie $W = \frac{1}{2} \epsilon C_0 V^2$. Die Feldstärke E ist dabei dieselbe, da die Spannung gleich ist. Mit der Energie ist auch die Energiedichte ϵ mal grösser geworden. Im Dielektrikum gilt also

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{w = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2} \quad \text{in e.s.u.}$$

Mit $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ bzw. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ kann man allgemeiner schreiben

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{w = \frac{1}{8\pi} \vec{D} \cdot \vec{E}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Die zweite Schreibweise ist auch in anisotropen Medien noch gültig, wo \vec{D} und \vec{E} durch einen Tensor 2. Stufe verknüpft und im allgemeinen nicht parallel sind.

No steckt die zusätzliche Energie?

a) Der Fall der polarisierbaren Atome: Nach dem einfachen Atommodell von S. 49 wirkt auf den um den Vektor \vec{e} aus dem

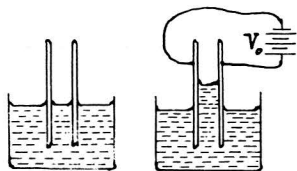
Zentrum der negativen Ladung verschobenen Atomkern eine rücktreibende Kraft, die proportional ist zur Auslenkung. Wenn das Atom polarisiert wird, wird sozusagen eine "atominterne Feder" gespannt. Die zusätzliche Energie steckt also in den Atomen, und zwar ändert sich sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie der umlaufenden Elektronen, wenn man ein Atom in ein elektrisches Feld bringt. Wir können diese zusätzliche Energie über den Raum mitteln und eine entsprechende Energiedichte w_{Atom} definieren. Es ist dann

$$w = w_0 + w_{\text{Atom}}, \text{ also } \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + w_{\text{Atom}}, \text{ woraus}$$

$$w_{\text{Atom}} = \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 E^2 \text{ in SI und } w_{\text{Atom}} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon - 1) E^2 \text{ in c.s.u.}$$

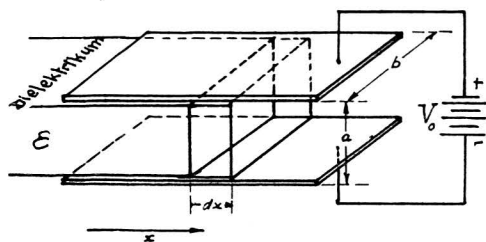
b) Der Fall der permanenten Dipole: um die Konzepte klar auseinanderzuhalten, betrachten wir starr permanente Dipole. Bei der dielektrischen Polarisation werden dann keine "molekülinternen Federn" gespannt. Man muss sich vorstellen, dass die Dipole in ein viskoses Medium eingebettet sind. Sie pendeln deshalb nicht, wenn das Drehmoment $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ eingeschaltet wird. Sie richten sich aber auch nicht vollständig aus, selbst nach beliebig langer Zeit nicht; denn derselbe Mechanismus, der die Dämpfung der Rotationsbewegung bewirkt, erzeugt auch eine rotatorische Zitterbewegung (rotatorische Brown'sche Bewegung). Und diese sorgt dafür, dass der Ausrichtungsgrad sehr gering bleibt. Das Problem des Anteils der Energiedichte w , der in der molekularen Bewegung steckt, kann ohne tiefere Kenntnisse der Wärmelehre nicht verstanden werden.

Beispiel zur Anwendung der Formel für die Energiedichte.



Demonstrationsexperiment: Eine dielektrische Flüssigkeit (Nitrobenzol) wird in einen Kondensator hineingezogen, wenn eine Spannung angelegt wird.

um das Problem nicht unnötig durch hydrostatische Betrachtungen zu komplizieren, berechnen wir die Kraft, mit der eine dielektrische Platte zwischen die Platten eines Kondensators gezogen wird, wobei wir wie bisher die Randkorrekturen vernachlässigen. Die Energiebetrachtung, die zur Lösung führt, kann in folgende Schritte zerlegt werden:



Die dielektrische Platte zwischen die Platten eines Kondensators gezogen wird, wobei wir wie bisher die Randkorrekturen vernachlässigen. Die Energiebetrachtung, die zur Lösung führt, kann in folgende Schritte zerlegt werden:

① Die mechanische Arbeit, die das Dielektrikum leistet beim Verschieben um die Strecke dx beträgt $dW_{\text{mech}} = F dx$. (Im Demonstrationsexperiment wird Flüssigkeit gehoben.)

② Die Energie im Volumen $abdx$ nimmt zu, da es mit dem Dielektrikum gefüllt wird bei konstant gehaltener Spannung und damit konstant gehaltener Feldstärke $E = \frac{V_0}{a}$. (Es wird ein homogenes Feld angenommen.) Die Energiezunahme in diesem Volumen beträgt:

$$dW_{\text{Vol}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2\right)}_{\text{Energiedichte nach Verschieb.}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2\right)}_{\text{Energiedichte vor Verschieb.}} abdx = \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{V_0^2}{a^2} abdx = \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 V_0^2 \frac{b}{a} dx$$

③ Die Batterie liefert elektrische Energie: Beim Verschieben des Dielektrikums nimmt die Kapazität des Kondensators zu. Die Zunahme findet zwischen x und $x+dx$ statt und beträgt:

$$dC = \epsilon \epsilon_0 \frac{b dx}{a} - \epsilon_0 \frac{b dx}{a} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{b}{a} dx$$

Die Batterie, die die Potentialdifferenz V_0 aufrecht erhält, befördert dabei zusätzliche Ladung dQ von der einen Kondensatorplatte zur anderen und steckt dabei folgende Energie in den Kondensator hinein:

$$dW_{\text{Batt.}} = V_0 dQ = V_0 V_0 dC = (\epsilon - 1) \epsilon_0 V_0^2 \frac{b}{a} dx$$

③ Die Energiebilanz: Die dielektrische Platte leistet mechanische

Arbeit. Gleichzeitig vergrößert sich die Energie im Volumen $abd\mathbf{x}$.
Die Energierechnung wird von der Batterie bezahlt:

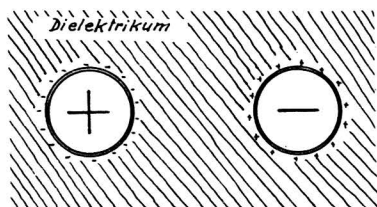
$$d\tilde{W}_{\text{mech}} + d\tilde{W}_{\text{Vol}} = d\tilde{W}_{\text{Batt}}$$

$$F dx + \frac{1}{2}(\epsilon-1)\epsilon_0 V_0^2 \frac{b}{a} dx = (\epsilon-1)\epsilon_0 V_0^2 \frac{b}{a} dx, \text{ woraus}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}(\epsilon-1)\epsilon_0 \frac{b}{a} V_0^2} \text{ in SI} \quad \text{und} \quad \boxed{F = \frac{\epsilon-1}{8\pi} \frac{b}{a} V_0^2} \text{ in e.s.u.}$$

1.11.8. Elektrostatische Kräfte zwischen geladenen Körpern im Dielektrikum.

Betrachte als Beispiel zwei homogene Kugelladungen Q_1 und Q_2 . Nach aussen wirken sie wie Punktladungen (S.23/24). Die Kraft, die sie im Vakuum aufeinander ausüben, ist deshalb $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Der Raum um diese Ladungen werde nun ausgefüllt mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ϵ . Wie ändert sich die Kraft?

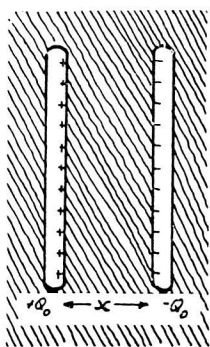


Naiv könnte man wie folgt argumentieren: Jede Kugel polarisiert das Dielektrikum genau so, wie die im Abschnitt 1.11.6 besprochene geladene Metallkugel; denn für einen Punkt außerhalb der Kugel kommt es nicht darauf an, ob die ("wahre") Ladung auf der Oberfläche oder im Volumen homogen verteilt ist. Die Polarisationsladung auf der Grenzfläche Kugel/Dielektrikum schirmt die "wahre" Ladung ab, sodass nach aussen nur die Ladung $\frac{1}{\epsilon} Q_1$ bzw. $\frac{1}{\epsilon} Q_2$ in Erscheinung tritt. Nach dieser einfachen Überlegung wäre die Kraft zwischen den beiden Kugeln $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Dieses Ergebnis ist falsch!

Man könnte der obigen Überlegung folgenden Einwand entgegenhalten: Die Ladung Q_1 polarisiert das Dielektrikum auch bei Q_2 und umgekehrt. Diese Tatsache wurde bei der Berechnung der Abschirmung nicht berücksichtigt. Ob dieser Einwand ganz

stichhaltig ist, kann aber durch folgendes Argument in Frage gestellt werden: Wenn man die Kugeln zusammenschrumpfen lässt, wird die Feldstärke an der Grenzfläche zum Dielektrikum sehr gross, sodass jeweils die andere Kugel die "Abschirmung" nicht mehr wesentlich beeinflusst. Offensichtlich packt man das Problem nicht so an.

Eine Energiebetrachtung führt auf sicherem Wege zum Ziel: Man verändert den Abstand der Kugeln um eine infinitesimale Strecke dr und berechnet die damit verbundene Änderung der Feldenergie im ganzen Raum. Die mechanische Arbeit $dW_{\text{mech}} = F dr$, die bei der Verrückung geleistet wird, ist gleich der Änderung der Feldenergie. Die Rechnung ist für den Fall von zwei Kugeln etwas aufwendig. Bei zwei parallelen Platten kommt man indessen rasch zum Ziel, wenn deren Abstand klein ist im Vergleich zum Durchmesser: Plattenkondensator.



Die Platten seien zunächst im Vakuum, und hier werden ihnen entgegengesetzt gleiche Ladungen $\pm Q_0$ erteilt. (Falls dies mittels einer Batterie geschieht, so wird diese wieder weggenommen.) Darauf wird in den ganzen Raum eine dielektrische Flüssigkeit mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ eingefüllt. Q_0 bleibt dabei die Ladung des Plattenkondensators (die Ladung, die durch einen Draht fließen würde, wenn man die beiden Platten damit verbinden würde). Was sich beim Einfüllen des Dielektrikums ändert, ist hier die Kapazität C . (Die Batterie ist nicht angeschaltet.) Die Kapazität steigt vom Vakuumwert $C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{x}$ auf $C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{x}$. Die auf S. 46 beschriebene Methode der Verrückung führt dann auf die Kraft $F = \frac{Q_0^2}{2\epsilon \epsilon_0 A}$. Sie ist ϵ -mal kleiner als für das Vakuum. Das entsprechende Ergebnis findet man beim Durchrechnen des Problems der geladenen Kugeln. Das Coulomb'sche Gesetz im Dielektrikum lautet also

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

im SI und

$$F = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

in e.s.u.

(Im SI kommt ϵ immer in der Kombination $\epsilon\epsilon_0$ vor.)

Da die Kapazität beim Einfüllen des Dielektrikums ϵ mal grösser wird, und die Kondensatorladung konstant bleibt, wird die Potentialdifferenz zwischen den Platten ϵ mal kleiner. Damit wird auch die Feldstärke \vec{E} ϵ mal kleiner. Zusammenfassend kann man sagen:

Bei konstant gehaltenen "wahren" Ladungen werden die Kräfte, die Feldstärke \vec{E} und die Potentialdifferenzen ϵ mal kleiner, wenn der Raum mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ϵ gefüllt wird.

Betrachte nun als Gegensatz den Fall, wo die Kondensatorplatten an eine Batterie angeschlossen bleiben beim Einfüllen des Dielektrikums. Dann bleibt sowohl die Potentialdifferenz als auch die Feldstärke unverändert. Da aber die Kapazität ϵ mal grösser wird, steigt die Ladung der Kondensatorplatten, die als "wahre" Ladung bezeichnet wird, vom Vakuumwert Q_0 auf den Wert ϵQ_0 . Die Kraft steigt damit vom Vakuumwert

$$F_0 = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 A} \quad (\text{S. 47}) \quad \text{auf den Wert} \quad F = \frac{(\epsilon Q_0)^2}{2\epsilon\epsilon_0 A} = \epsilon F_0 \quad (\text{S. 65})$$

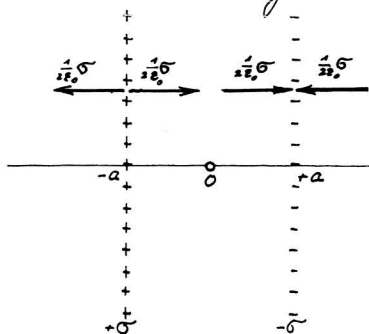
Zusammengefasst:

Werden die Potentiale der Leiter konstant gehalten, dann steigen die "wahren" Ladungen und die elektrostatischen Kräfte auf das ϵ -fache, wenn der Raum zwischen den Leitern mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ϵ gefüllt wird.

1.11.9. Bedingungen an Grenzflächen.

a) Die Grenzfläche zwischen Leiter und Vakuum.

Dieser Fall wurde schon auf S. 25 behandelt. Wir geben hier eine etwas verschiedene Herleitung, die sich besonders zur Behandlung des Plattenkondensators eignet. Wir betrachten zunächst das Feld \vec{E} , das von zwei parallelen, entgegengesetzt gleichen Flächenladungen, $+\sigma$ bei $x = -a$ und $-\sigma$ bei $x = +a$ erzeugt wird.



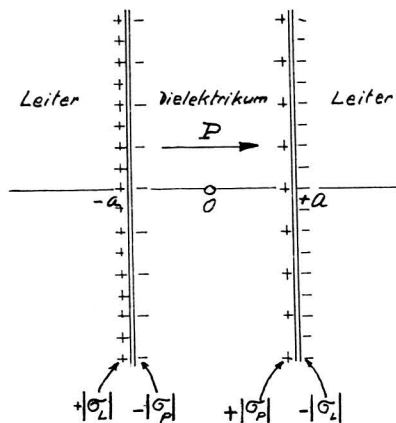
Die positive Ladung allein würde im Halbraum $x \geq -a$ ein nach rechts gerichtetes Feld der Stärke $\frac{1}{2\epsilon_0}\sigma$ und im Halbraum $x \leq -a$ ein nach links gerichtetes Feld derselben Stärke erzeugen. (vgl. S. 24).

Die negative Ladung allein würde im Halbraum $x \geq a$ ein nach links gerichtetes Feld der Stärke $-\frac{1}{2\epsilon_0}\sigma$ und im Halbraum $x \leq a$ ein nach rechts gerichtetes Feld derselben Stärke erzeugen.

Die Überlagerung der oben beschriebenen Felder ergibt im Raum $-a \leq x \leq +a$ ein nach rechts gerichtetes Feld der Stärke $\frac{1}{2\epsilon_0}\sigma + \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$, während für $|x| > a$ das Feld verschwindet. Man darf also die beiden Halbräume $x < -a$ und $x > a$ mit einem leitenden Material ausfüllen ("Kondensatorplatten"), ohne dass sich am Feld etwas ändert. Damit kann man in Übereinstimmung mit S. 25 sagen, dass für die Feldstärke über einer Metalloberfläche mit der Flächenladungsdichte σ im Vakuum $E = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$ gilt.

b) Grenzfläche Leiter - Dielektrikum.

Wir betrachten die auf S. 55 skizzierte Situation auf eine andere Weise, nämlich als Abfolge von parallelen, homogen geladenen



Ebenen. Das resultierende Feld \vec{E} ist die Superposition der von den vier Ebenen erzeugten Felder; denn alle Ladungen tragen zu \vec{E} bei (vgl. S. 56, 58).

Man sieht dann bei Anwendung der Formeln von S. 25 oben sofort, dass

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} (|\sigma_L| - |\sigma_P|) \quad \text{für } -a < x < +a$$

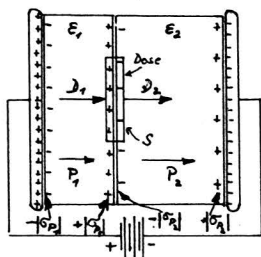
und

$$E = 0 \quad \text{für } |x| > a$$

in Übereinstimmung mit S. 56

Zum Felde \vec{D} hingegen tragen nur die beiden Ebenen mit den Flächenladungsdichten $+\sigma_L$ und $-\sigma_P$ bei. Man sieht dann sofort, dass $D = |\sigma_L|$ für $-a < x < +a$ und $D = 0$ für $|x| > a$

c) Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika.



Ein Plattenkondensator sei mit zwei verschiedenen Dielektrika ϵ_1 und ϵ_2 gefüllt, deren Grenzfläche parallel zur Plattenfläche sei. Die Polarisation wird im allgemeinen nicht in beiden Dielektrika gleich sein.

Damit sind auch die Polarisationsladungen verschieden.

Die resultierende Polarisations-Flächenladungsdichte der Grenzfläche setzt sich zusammen aus $|\sigma_P| = P_1$ und $-\sigma_P = -P_2$ und beträgt somit $P_1 - P_2$. Diese Flächenladung allein würde ein Feld \vec{E} erzeugen, das für $P_1 - P_2 > 0$ auf der linken Seite der Grenzfläche nach links und auf der rechten Seite der Grenzfläche nach rechts gerichtet ist und den Betrag $\frac{1}{2\epsilon_0} (P_1 - P_2)$ hat (vgl. S. 25 oben). Die Feldstärke E springt also beim Durchgang durch die Grenzfläche um $\frac{1}{\epsilon_0} (P_1 - P_2)$. Allgemein gilt:

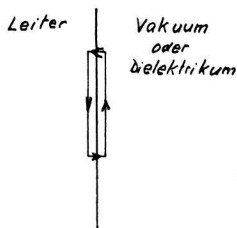
Die Normalkomponente von \vec{E} ist unstetig an der Grenze von zwei Dielektrika mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten.

Viel einfacher ist die Betrachtung des Feldes \vec{D} : Wir wenden den Satz von Gauss an auf die skizzierte flache Dose, welche ein Stück S der Grenzfläche umschließt. Da die Polarisationsladungen nichts beitragen zu $\text{div } \vec{D}$, wird $\iint \vec{D} \cdot d\vec{f} = 0$. Da das Integral offensichtlich $(D_2 - D_1)S$ beträgt, ^{da oben offen} folgt $D_1 = D_2$. Allgemein gilt:

Die Normal Komponente von \vec{D} ist stetig an der Grenzfläche zweier Dielektrika.

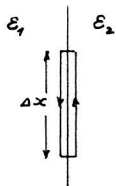
d) Die Tangentialkomponenten der Felder \vec{E} und \vec{D}

a) Grenzfläche Leiter - Vakuum und Leiter - Dielektrikum:



Da in der Elektrostatik \vec{E} als Gradient einer Potentialfunktion dargestellt werden kann, verschwindet das Linienintegral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ über jede geschlossene Kurve, also auch über die skizzierte Rechtecklinie. Da der Integrationsweg im Leiter wegen $\vec{E} = 0$ nichts beiträgt, verschwindet auch das Linienintegral über die Gegenseite, d.h. die Tangentialkomponente von \vec{E} an der Grenzfläche verschwindet auch auf der Seite des Dielektrikums oder Vakuums. (Dies folgt auch daraus, dass die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche ist: \vec{E} steht senkrecht auf der Äquipotentialfläche. Vgl. S. 29). Mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ kann man schließen, dass im Falle eines isotropen Dielektrikums auch die Tangentialkomponente von \vec{D} verschwindet.

β. Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika.



$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ gilt allgemein in der Elektrostatik. Bezeichnen wir die Tangentialkomponenten des Feldes \vec{E} an der Grenzfläche mit $E_t^{(1)}$ und $E_t^{(2)}$, so wird für die skizzierte schmale Rechteckschleife

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_t^{(2)} - E_t^{(1)}) \Delta x = 0, \text{ also } E_t^{(1)} = E_t^{(2)} = E_t$$

Die Tangentialkomponente von \vec{E} ist stetig an der Grenzfläche zwischen

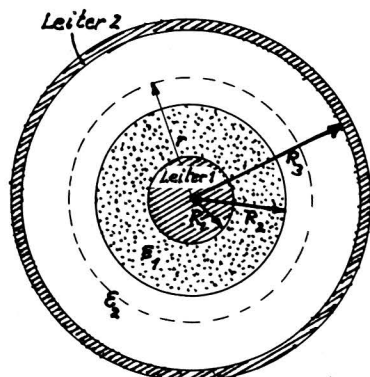
zwei Dielektrika.

die Tangentialkomponente von \vec{D} ist nicht stetig:

die Betrachtung derselben schmalen Rechteckschleife ergibt bei isotropen Dielektrika

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \epsilon_2 E_t^{(2)} \Delta x - \epsilon_1 E_t^{(1)} \Delta x = (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_t \Delta x \neq 0$$

Anwendungsbeispiel



Man berechne die Kapazität des beschriebenen Kugelkondensators, dessen Dielektrikum aus zwei konzentrischen Schichten aus isotropem Material besteht:

$R_1 \leq r \leq R_2$ Dielektrizitätskonstante ϵ_1 ,

$R_2 \leq r \leq R_3$ Dielektrizitätskonstante ϵ_2

Vorgehen: Man berechnet zuerst das Feld \vec{D} , gewinnt daraus das Feld \vec{E} , bildet das Linienintegral $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ und benutzt die Definition

der Kapazität, $C = \frac{Q}{V}$.

Zur Berechnung des Feldes $\vec{D}(r)$ benutzt man die Integralform der Beziehung $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{wahr}}$, nämlich $\iiint \vec{D} \cdot d\vec{f} = Q_{\text{wahr}}$ (vgl. S.59/60), wobei Q_{wahr} mit der Ladung Q des Kondensators zu identifizieren ist (S.56/59). Als Integrationsfläche wählt man aus Symmetriegründen eine konzentrische Kugel vom Radius r , die sowohl im Dielektrikum ϵ_1 als auch im Dielektrikum ϵ_2 verlaufen kann. Es wird dann $4\pi r^2 D(r) = Q$, also $D(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}$. Mit $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ (S.58) erhält man dann

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \text{für } R_1 < r < R_2 \quad \text{und}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \text{für } R_2 < r < R_3$$

$\vec{E} = -\text{grad } V$ gilt immer in der Elektrostatik, sodass

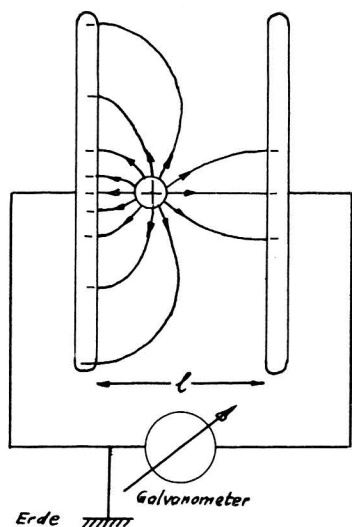
$$V(R_1) - V(R_3) = \int_{R_1}^{R_3} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right]$$

Definitionsgemäss ist die Kapazität gleich dem Ausdruck in der eckigen Klammer.

2. Der elektrische Strom

2.1. Die einfachsten Modellvorstellungen

2.1.1. Der Strom als bewegte Ladung.



Demonstrationsexperiment zur Einleitung

Zwischen zwei parallelen Metallplatten, die über ein Galvanometer leitend verbunden sind, befindet sich eine geladene Metallkugel. Sie wird bewegt längs der Senkrechten zur Plattenfläche.

Beobachtungen:

1. Es fließt ein Strom durch das Galvanometer, solange sich die Kugel bewegt.
2. Mit der Bewegungsrichtung kehrt auch die Stromrichtung um.
3. Bei gleicher Bewegungsrichtung sind die Stromrichtungen bei Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens entgegengesetzt.
4. Die Stromstärke nimmt zu mit zunehmender Geschwindigkeit der geladenen Kugel.
5. Je grösser der Plattenabstand l ist, umso kleiner ist unter sonst gleichen Bedingungen die Stromstärke.

Wesentlich ist die Beobachtung, dass ein Strom durch das Galvanometer fliesst, ohne dass die Kugel eine Platte berührt. Die Ladung der Kugel ändert sich nicht. Der Strom kommt zustande durch Umlagerung der Ladungen, die durch die geladene Kugel auf den Platten beeinflusst werden. (In der skizzierten Anordnung kommen nur negative Influenzladungen vor. Man muss sich vorstellen, dass die positiven Influenzladungen zur Erde abgefloßen sind). Beim Plattenabstand ℓ findet man bei einer Ladung Q , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, die Stromstärke

$$I = \frac{Qv}{\ell}$$

$\frac{C\ell b}{\text{sec}} = \text{Ampère in SI}$
 $\frac{\text{statC}\ell b}{\text{sec}} = \text{statampère in e.s.u.}$

Nach S. 13 gilt $1 C\ell b = 3 \cdot 10^9 \text{ statC}\ell b$, also $1 \text{ Ampère} = 3 \cdot 10^9 \text{ statamp.}$

Grössenordnung des Stromes im Demonstrationsexperiment: Wir betrachten die Kugel als Innenleiter eines Kugelkondensators und die geerdeten Leiter in der Umgebung als äusseren Leiter. Solange ihr Abstand ein Vielfaches des Kugelradius ist, kann man nach S. 40 für die Kapazität in e.s.u. annähernd den Radius einsetzen. Durch Abstreichen der Ladung eines geriebenen Glasstabes an der Kugel kann diese erfahrungsgemäss sehr leicht auf ein Potential von ca. 9000 Volt = 30 statvolt gegen Erde gebracht werden. Bei einem Kugelradius von 3 cm ist dann $Q = CV = RV = 3 \cdot 30 \text{ statC}\ell b$. Bei einem Plattenabstand $\ell = 30 \text{ cm}$ und einer Geschwindigkeit $v = 10 \text{ cm/sec}$ ist dann der Strom

$$I = \frac{Qv}{\ell} = \frac{90 \cdot 10}{30} \text{ statamp.} = 30 \text{ statamp.} = 10^{-8} \text{ Amp.}$$

Bewegter Ladungsträger im Dielektrikum:

Wie gross ist im oben beschriebenen Experiment der Strom I , wenn zwischen den Platten ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ eingefüllt wird, nachdem der Kugel die Ladung Q erteilt wurde? Q ist die sog. "wahre" Ladung (vgl. S. 59). Wenn man z.B. ein Elektron in ein kontinuierliches Dielektrikum eintauchen könnte, so wäre die "wahre" Ladung die Ladung e

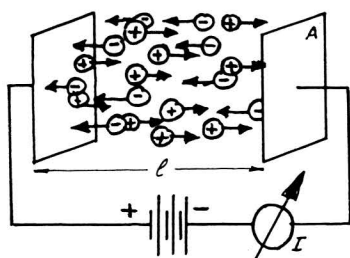
des Elektrons. Man könnte nun argumentieren, dass wegen der Abschirmung der "wahren" Ladung durch die Polarisationsladungen (vgl. S. 60) der Strom in diesem modifizierten Experiment gegeben ist durch

$I = \frac{1}{\epsilon} \frac{Qv}{l}$. Das ist falsch! Wir haben bei dieser Überlegung nicht berücksichtigt, dass die Grenzfläche des Dielektrikums an den Platten wegen der Polarisation eine positive Oberflächenladung bekommt, die auf den Platten negative Influenzladung hervorruft, und zwar gerade so, dass der Abschirmungseffekt kompensiert wird. Die Formel $I = \frac{Qv}{l}$ behält ihre Gültigkeit bei.

2.1.2. Der Strom bei vielen bewegten Ladungsträgern.

Aus dem beschriebenen Modellversuch lassen sich einfache Vorstellungen über den Elektrizitätstransport in flüssigen und festen Medien entwickeln:

Wir nehmen an, dass sich zwischen zwei parallelen, leitenden Platten ein als Ganzes ungeladenes Material befindet, das pro Volumeneinheit n^+ bewegliche positive Ladungsträger mit der "wahren" Ladung q^+ und n^- negative Ladungsträger mit der "wahren" Ladung q^- enthalte. Da im Material noch unbewegliche Ladungsträger vorhanden sein können, ist es nicht nötig zu postulieren, dass $n^+q^+ + n^-q^- = 0$. Im einem gewöhnlichen Metall sind z.B. die positiven Ionen unbeweglich, und der ganze Ladungstransport wird durch die sog. Leitungselektronen besorgt. Die Bewegung der Ladungsträger soll zustande kommen, indem man im Material ein elektrisches Feld erzeugt, z.B. durch Anschalten einer Batterie an die Platten. Die positiven Ladungsträger bewegen sich dann in der einen Richtung mit der Geschwindigkeit v^+ und die negativen Ladungsträger in der Gegenrichtung mit der Geschwindigkeit v^- . Wir



nehmen stillschweigend an, dass die Ladungsträger in diesem Felde nicht beliebig beschleunigt werden, sondern nach kurzer Zeit eine stationäre Geschwindigkeit v^+ bzw. v^- annehmen. Der Strom I , der durch das Ampèremeter im Leiterkreis fließt,

ist dann bei einer Plattenfläche A

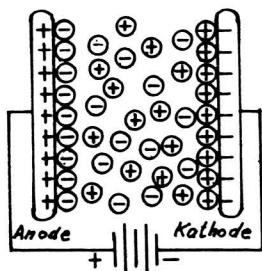
$$I = \frac{n^+ A l q^+ v^+ + n^- A l q^- v^-}{l} \quad \text{Beachte, dass } q^+ v^+ \text{ und } q^- v^-$$

dasselbe Vorzeichen haben. Die Stromdichte $i = \frac{I}{A}$ zwischen den Platten ist dann

$$i = n^+ q^+ v^+ + n^- q^- v^-$$

Wie wird der Strom über längere Zeit aufrecht erhalten?

Der Strom kann nur dann dauernd fließen, wenn sich die Ladungsträger bei der Ankunft an den Platten entladen können, oder wenn sie in die Platten übertreten und durch den äusseren Kreis durch die Batterie zirkulieren können. Die erste Möglichkeit ist bei der Elektrolyse realisiert, die zweite bei der Elektronenleitung in Metallen und Halbleitern. Wenn diese Prozesse aus irgend einem Grunde nicht möglich sind, dann sammeln sich vor der positiven Elektrode (Anode) negative Ladungsträger an und vor der negativen Elektrode (Kathode) positive Ladungs-



träger, bis das resultierende elektrische Feld im Raume zwischen den Platten verschwindet. Dann hört der Strom auf zu fließen. Dies tritt sehr häufig auf bei der Ionenleitung in festen Körpern. Auch bei der Elektrolyse wässriger Lösungen kann dieser Effekt beobachtet werden, z.B. dann, wenn sich auf einer der beiden Elektroden eine nichtleitende Schicht bil-

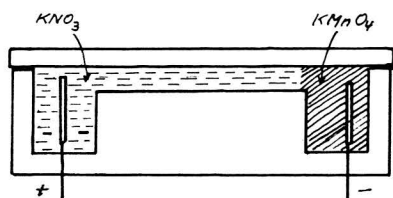
den. Dies tritt sehr häufig auf bei der Ionenleitung in festen Körpern. Auch bei der Elektrolyse wässriger Lösungen kann dieser Effekt beobachtet werden, z.B. dann, wenn sich auf einer der beiden Elektroden eine nichtleitende Schicht bil-

det.

Demonstration: Bei der Elektrolyse einer wässrigen Lösung von NaHCO_3 (Natriumbicarbonat, Backpulver) mit Al-Anode und z.B. Pt-Kathode hört der Strom nach kurzer Zeit auf zu fließen, weil sich auf der Anode eine nichtleitende Al_2O_3 -Schicht bildet. Palt man um, so wird die (sehr dünne) Oxidschicht sofort reduziert, und der Strom fließt wieder. Diese Einrichtung kann als Gleichrichter für technischen Wechselstrom verwendet werden.

2.1.3. Ionenleitung in Elektrolyten.

Demonstrationsexperiment: Dichte Beobachtung der Ionenwanderung: Im skizzierten Glasgefäß

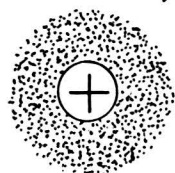


wird die Voratsrinne rechts mit wässriger KMnO_4 -Lösung und die Voratsrinne links und der Rest des Gefäßes mit einer wässrigen

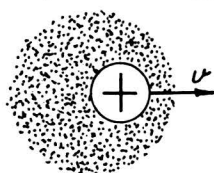
KNO_3 -Lösung gefüllt. Die KNO_3 -Lösung ist farblos, die KMnO_4 -Lösung durch die hydratisierten $(\text{MnO}_4)^-$ -Ionen violett-rot gefärbt. Verbindet man die linke Elektrode mit dem positiven und die rechte Elektrode mit dem negativen Pol einer Batterie, dann verschiebt sich die Grenze zwischen der gefärbten und der ungefärbten Flüssigkeit nach links mit konstanter Geschwindigkeit. Beim Umpolen reversiert die Bewegungsrichtung. Bei einer elektrischen Feldstärke von rund $10'000 \text{ Newton/Coulomb} = 10'000 \text{ Volt/m}$ beträgt die Wanderungsgeschwindigkeit rund 10^{-4} m/sec .

Eine einfache Modellvorstellung liefert bereits die richtige Größenordnung: Wir betrachten die Ionen des Elektrolyten als geladene Kugeln, die sich in einer viskosen Flüssigkeit bewegen. Die Hydrodynamik lehrt, dass die Kraft, die nötig ist, um eine Kugel vom Radius a in einer Flüssig-

heit der Viskosität η mit der Geschwindigkeit \vec{v} zu bewegen, gegeben ist durch $\vec{F} = 6\pi a \eta \vec{v}$. Dies ist die Formel vom Stokes. Sie gilt streng für eine Kugel, die sich so langsam bewegt, dass die Trägheitskräfte in der sie umströmenden Flüssigkeit klein sind im Vergleich zu den viskosen Reibungskräften. (In der Hydrodynamik spricht man dann vom Fall der kleinen Reynolds'schen Zahl.) Als Näherung darf die Stokes'sche Formel auch noch für eine Kugel von molekularer Grösse angewendet werden. Dies ist nicht selbstverständlich, da die Flüssigkeit dann nicht mehr als homogenes Kontinuum betrachtet werden darf. Eine zusätzliche Komplikation tritt im Elektrolyten auf, weil sich in der Umgebung eines Ions die Ionen mit entgegengesetztem Ladungszeichen bevorzugt aufhalten: Debye-Hückel Wolke". Wenn sich das



ruhes Ion mit
konzentrischer
Debye-Hückel Wolke



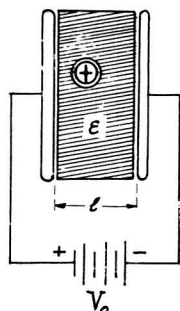
bewegtes Ion mit
verschobener
Debye-Hückel Wolke

zentrale Ion bewegt, bleibt die Debye-Hückel Wolke stets etwas zurück, da es zu ihrer Anpassung an die neue Lage Zeit braucht. Ihr Ladungsschwerpunkt ist verschoben, so dass

sie das zentrale Ion nach rückwärts zieht. Zur Stokes'schen Reibungskraft kommt eine Kraft hinzu, die ebenfalls proportional zur Geschwindigkeit ist. Man kann dem Ion einen effektiven Radius a_{eff} zuschreiben. Dieser ist grösser als der "geometrische" Radius, aber meistens noch von derselben Grössenordnung. Für die $(\text{MnO}_4)^-$ -Ionen im Demonstrationsexperiment setzen wir $10 \text{ \AA} = 10^{-7} \text{ cm}$ ein.

Die elektrische Kraft auf die Ladungsträger.

Um die begrifflichen Schwierigkeiten in den Vordergrund zu stellen, lassen wir die Komplikation durch die Debye-Hückel Wolke ausser Acht und betrachten eine wahre Ladung Q , die in das flüssige Dielektrikum zwischen den Platten eines Kondensators eingetaucht wurde, der an eine Batterie der Spannung V_0 angeschlossen ist. Die von der Batterie erzeugte Feldstärke



ist gegeben durch $E = \frac{V_0}{\ell}$; denn dieses Feld ist homogen, und $\vec{E} = -\text{grad } V$ gilt allgemein in der Elektrostatik. Die eingetauchte wahre Ladung Q wird nach S. 60 durch die Polarisationsladungen so abgeschirmt, dass sie nach aussen als totale Ladung $\frac{1}{\epsilon} Q$ in Erscheinung tritt, wobei ϵ die Dielektrizitätskonstante der Flüssigkeit bedeutet. Damit stellt sich folgende Frage: Ist die elektrostatische Kraft $\vec{F} = Q\vec{E}$ oder $\vec{F} = \frac{1}{\epsilon} Q\vec{E}$? Wir versuchen, die Antwort mit Hilfe einer Energiebetrachtung zu finden:

Wir gehen davon aus, dass die Formel $I = \frac{Qv}{\ell}$ auch dann noch gilt, wenn sich der Ladungsträger mit der wahren Ladung Q im Dielektrikum bewegt (vgl. S. 72/73). Im infinitesimalen Zeitintervall zwischen t und dt verschiebt er sich in der Feldrichtung um $dx = v dt$. Durch die Batterie fließt dabei die Ladung

$$I dt = \frac{Qv dt}{\ell} = \frac{Q dx}{\ell}$$

die von der Batterie geleistete elektrische Arbeit ist nach S. 18

$$dW_{\text{Batt}} = V_0 I dt = \frac{Q V_0}{\ell} dx$$

Wo finden wir diese Energie wieder?

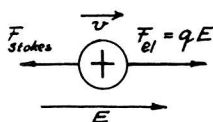
- 1) Die gesuchte elektrostatische Kraft leistet bei der Verschiebung des Ladungsträgers die Arbeit $F dx$. Ein Teil geht in kinetische Energie des Ladungsträgers über und ein anderer Teil in Wärme, und zwar wegen der Stokes'schen Reibung.
- 2) Das elektrische Feld im Raume hat sich geändert; denn der Ladungsträger hat sich relativ zu den Platten (Äquipotentialflächen) verschoben. Damit ändert sich die Feldenergie.

Die Änderung 2) kann bei der Betrachtung von leitenden Materialien vernachlässigt werden; denn man hat nicht einen einzigen Ladungsträger, sondern sehr viele. Vom phänomenologischen Standpunkt aus ist einem homogen positiv geladenen Kontinuum ein homogen negativ geladenes Kontinuum mit gleicher

Ladungsdichte überlagert. Wenn sich diese Kontinua um infinitesimale Strecken verschieben, so ändert sich im Innern des Materials nichts (vgl. Fig. S. 53). Im Gegensatz zur dielektrischen Polarisation werden aber hier die Oberflächenladungen abgeführt. Das elektrische Feld und damit die Feldenergie bleibt unverändert.

Damit darf man schreiben $dW_{\text{Batt}} = F dx$, also $\frac{Q V_0}{\ell} dx = F dx$. Mit $E = \frac{V_0}{\ell}$ wird damit

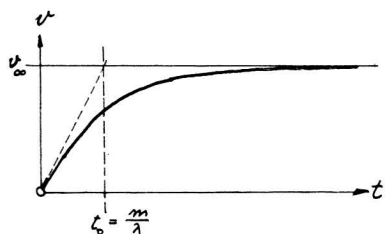
$F = QE$, d.h. die wahre Ladung ist massgebend für die elektrostatische Kraft. Die Bewegungsgleichung für ein Ion der Ladung q und der Masse m ist damit



$m \dot{v} = qE - 6\pi a_{\text{eff}} \eta v$ Mit der Abkürzung $6\pi a_{\text{eff}} \eta = \lambda$ ist

die Lösung für die Anfangsbedingung $v = 0$ bei $t = 0$

$v(t) = v_{\infty} (1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t})$, wobei v_{∞} die Geschwindigkeit im stationären Zustand bedeutet.



Es ist dann $\dot{v} = 0$. Aus der Bewegungsgleichung entnimmt man, dass $v_{\infty} = \frac{q}{\lambda} E$. Nach einer charakteristischen Zeit $t_0 = \frac{m}{\lambda}$ weicht die Geschwindigkeit nur noch um $\frac{1}{e} v_{\infty} = 0.37 v_{\infty}$ von v_{∞} ab.

Abschätzung von t_0 (Rechnung im c.g.s.-System):

$$\left. \begin{array}{l} a_{\text{eff}} \approx 10^{-9} \text{ cm} \\ m \approx 2 \times 10^{-22} \text{ g (für } \text{MnO}_4\text{)} \\ \eta \approx 10^{-2} \text{ poise (für Wasser)} \end{array} \right\} t_0 = \frac{m}{6\pi a_{\text{eff}} \eta} \approx \frac{2 \times 10^{-22}}{6\pi \times 10^{-9} \times 10^{-2}} \approx 10^{-13} \text{ sec}$$

Die "Anlaufzeit" t_0 ist so kurz, dass man sie bei einem Elektrolyseexperiment vernachlässigen kann.

Abschätzung der stationären Geschwindigkeit v_{∞} (Rechnung in c.g.s./e.s.u.)
 Feldstärke im Demonstrationsexperiment $E \approx 10^4 \frac{\text{Newton}}{\text{Cbb}} = 0.33 \frac{\text{dyn}}{\text{statCbb}}$,
 Ladung des Ions $q = -1.6 \times 10^{-19} \text{ Cbb} = -4.8 \times 10^{-10} \text{ statCbb}$ (Elektronenladung).

$$v_{\infty} = \frac{qE}{6\pi a_{\text{eff}} \eta} \approx \frac{4.8 \times 10^{-10} \times 0.33}{6\pi \times 10^{-7} \times 10^{-2}} = 8.5 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$$

Dies ist in grössenordnungsmässiger übereinstimmung mit der Beobachtung. Tatsächlich ist unsere Modellvorstellung in ihren Grundzügen richtig.

Die Beweglichkeit b der Ladungsträger und der Begriff der Leitfähigkeit σ .

Die Beweglichkeit b eines Ladungsträgers in einem Leiter ist allgemein definiert durch die Beziehung $v_{\infty} = bE$. Für ein Ion in einem Elektrolyten ist also $b = \frac{q}{6\pi a_{\text{eff}} \eta}$. Durch Einführung der Beweglichkeit kann man den Ausdruck für die Stromdichte auf S. 74 auch wie folgt schreiben:

$\vec{i} = (n^+ b^+ q^+ + n^- b^- q^-) \vec{E}$; denn das Feld \vec{E} ist dasselbe für die verschiedenen Sorten von Ladungsträgern im Leiter. Der Ausdruck in der Klammer ist nach unseren Betrachtungen unabhängig von der Feldstärke E . Er wird Leitfähigkeit σ genannt:

$\sigma = (n^+ b^+ q^+ + n^- b^- q^-)$. Damit kann man schreiben

$$\boxed{\vec{i} = \sigma \vec{E}}$$

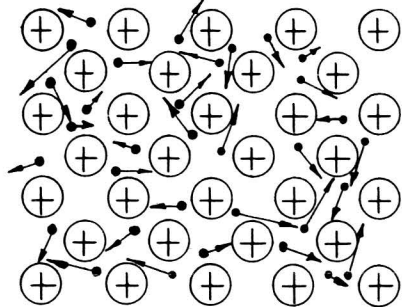
Im speziellen Fall, wo σ unabhängig ist von \vec{E} , bezeichnet man diese Beziehung als Ohm'sches Gesetz. Elektrolyten sind Beispiele für Ohm'sche Leiter. Die klassischen Ohm'schen Leiter sind aber Metalle. Georg Simon Ohm fand dieses Gesetz experimentell im Jahre 1826, zu einer Zeit, als es weder Ampere-meter noch Voltmeter noch gute Batterien gab. Ohm arbeitete mit Metalldrähten. Die Potentialdifferenzen erzeugte er mit Thermoelementen.

Das Ohm'sche Gesetz ist ein Materialgesetz. Es gehört nicht in die Klasse der fundamentalen Naturgesetze wie z.B. das Gravitationsgesetz, das Coulomb'sche Gesetz und die Newton'schen Gesetze der Mechanik. Umso erstaunlicher ist es, dass dieses Gesetz bei Metallen mit grösster Genauigkeit erfüllt ist von den kleinsten bis zu den grössten Feldstärken, bei denen man noch messen kann! Es gibt aber auch viele Materialien, bei denen \vec{i}

nicht proportional ist zu \vec{E} .

2.1.4. Das Gas-Modell eines Leiters.

Ein Elektrolyt ist nun deshalb ein Ohm'scher Leiter, weil die hydrodynamische Reibungskraft proportional ist zur Geschwindigkeit der Ladungsträger. Wir wollen nun ein Modell diskutieren, bei dem nicht ab initio eine solche Reibungskraft postuliert wird, und das aber trotzdem auf das Ohm'sche Gesetz führt. Ob dieses Modell einem realen Material entspricht, sei vorläufig dahingestellt. Es dient in erster Linie zur Erklärung einiger Begriffe, die zum Verständnis der Leitfähigkeit beitragen können. Bei der Aufstellung des Modells kann man sich von der Struktur der Metalle inspirieren lassen. Bei einem einfachen Metall, wie z.B. dem Natrium, kann man sich vorstellen, dass jedes Atom im Kristallgitter ein Elektron abgibt an ein "Elektronengas", das den Raum zwischen den verbleibenden positiven Ionen ausfüllt und diese so zusammenhält. Die elektrische Leitung erfolgt durch die Elektronen in diesem "Gas". Wir bezeichnen sie als Leitungselektronen.



Die Spielregeln des Modells seien folgende

- ① Die positiven Ionen können um ihre Gleichgewichtslage im Gitter schwingen und ihre Schwingungsenergie an ihre Nachbarn übertragen. Man

stelle sich die Federkette vor, die in Physik I S. 292 beschrieben ist. Diese Schwingungen entsprechen der thermischen Bewegung der Gitterionen.

- ② Die Elektronen sind dauernd in Bewegung, ähnlich wie die Moleküle eines Gases. Wenn kein elektrisches Feld angelegt wird, ist die Geschwindigkeitsverteilung isotrop. Dies soll heißen, dass die Statistik über ihre Schnelligkeiten nicht von der Richtung abhängen soll.

(dies ist nicht offensichtlich, wenn die positiven Ionen auf einem Gitter angeordnet sind.) Sei \vec{u}_j die Geschwindigkeit des Elektrons j . Der Gesamtimpuls $\sum_j m \vec{u}_j$ verschwindet und damit auch der Ladungstransport, der Strom.

③ Die Elektronen stossen miteinander und mit den positiven Ionen des Gitters zusammen. Wir postulieren, dass es eine charakteristische Zeit τ gebe, in der ein Elektron seine Vorgeschichte sozusagen völlig "vergisst". Dies soll folgendes heissen: Wir wählen zu einem bestimmten Zeitpunkt t aus dem Elektronengas alle Elektronen zur Beobachtung aus, deren Impulsvektoren (nach Grösse und Richtung) in der Nähe eines bestimmten Impulsvektors liegen. Zur Zeit $t + \tau$ sollen dieselben Elektronenindividuen wieder beobachtet werden. Die Statistik ihrer Impulsvektoren soll dann dieselbe isotrope Verteilung ergeben, wie sie für das ganze Elektronengas gefunden wird. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt man: Die Korrelation zwischen den Bewegungen geht in der Zeit τ verloren. Äquivalent zu dieser Vorstellung ist folgendes einfache Bild: Die Elektronen bewegen sich frei während einer Zeit, die im Mittel τ beträgt, und erleiden dann einen Zusammenstoss, der keine Korrelation zwischen der Bewegung vor- und nach dem Stoss übrig lässt. Die charakteristische Zeit τ kommt in den Theorien der Leitfähigkeit unter den folgenden Namen vor: Thermalisierungszeit, Relaxationszeit, mittlere Flugzeit, mittlere Stosszeit ...

④ Man denke sich nun das beschriebene System in einem elektrischen Felde \vec{E} . (Das Gitter der positiven Ionen sei festgehalten). Auf jedes Elektron wirkt die Kraft $\vec{F} = q \vec{E}$. Das Elektron j wird also zur Zeit Δt_j nach seinem letzten Zusammenstoss den zusätzlichen Impuls $\Delta \vec{p}_j = q \vec{E} \Delta t_j$ haben. Gemittelt über N Elektronen ist dieser Zusatzimpuls

$$\langle \Delta \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_j q \vec{E} \Delta t_j = q \vec{E} \frac{1}{N} \sum_j \Delta t_j = q \vec{E} \langle \Delta t_j \rangle$$

$\langle \Delta t_j \rangle$ ist die mittlere Zeit, die ein Elektron nach einem Stoss im

freien Fluge unterwegs ist, d.h. $\langle \Delta t_j \rangle = \tau$. Die mittlere Zusatzgeschwindigkeit, die sog. Driftgeschwindigkeit $\langle \Delta \vec{v} \rangle = \langle \Delta \vec{p} \rangle / m$ ist also gegeben durch

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{q\tau}{m} \vec{E} \quad \text{Diese Driftgeschwindigkeit trägt allein zum}$$

Ladungstransport bei. Die entsprechende Stromdichte ist nach S. 74

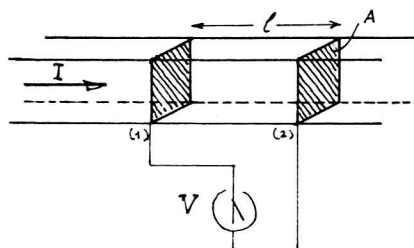
$\vec{j} = nq\langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E}$, wobei n die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit bedeutet. Nach der Definition der Leitfähigkeit von S. 79 ist dann

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$$

Nun die Thermalisierungszeit τ nicht vom elektrischen Felde \vec{E} abhängt, dann gilt das Ohm'sche Gesetz. Vor der obigen Formel darf man keinen Respekt haben: Die interessanten atomaren Aspekte sind in den Parameter τ hineingesteckt worden. Im Grunde genommen ist es eine phänomenologische Formel. Wenn man sie ernst nimmt und die experimentell bei Zimmertemperatur bestimmte Leitfähigkeit von Kupfer einsetzt, resultiert unter der Annahme, dass jedes Cu-Atom ein Elektron an das Elektronengas abgibt, eine Thermalisierungszeit τ von der Grössenordnung 10^{-14} sec.

2.2. Phänomenologische Beziehungen

2.2.1. Der Widerstand R und der spezifische Widerstand ρ



Ein Prisma aus homogenem Material mit der Leitfähigkeit σ und der Querschnittsfläche A werde in seiner Längsrichtung vom Strom I durchflossen. Wie gross ist die Spannung V zwischen den beiden Querschnitts-

flächen (1) und (2) ?

Die Stromdichte \vec{i} ist offensichtlich homogen und damit auch das Feld \vec{E} . Es ist dann

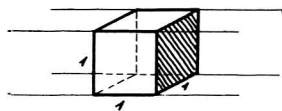
$\overline{V} = E\ell = \frac{i}{\sigma}\ell = \frac{I\ell}{A\sigma} = \overline{RI}$, wobei $R = \frac{\ell}{A\sigma}$ der Widerstand zwischen den Flächen (1) und (2) ist.

$$[R] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} = \text{Ohm im SI} \quad \text{und} \quad [R] = \frac{\text{statvolt}}{\text{statamp}} = \text{statohm in e.s.u.}$$

Zur Umrechnung von statohm in Ohm betrachten wir eine gegebene physikalische Situation: Zwischen zwei Querschnittsflächen eines prismatischen Leiters, der vom Strom von 1 statampère durchflossen wird, messe man die Spannung 1 statvolt. Der Widerstand ist dann 1 statohm. Nun ist nach S. 72 $1 \text{ statamp} = \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ Ampère}$ und nach S. 19 $1 \text{ statvolt} = 300 \text{ Volt}$. Im Ohm ist dann der Widerstand gegeben durch

$$R = \frac{V}{I} = \frac{300 \text{ Volt}}{\frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ Amp}} = \underline{9 \cdot 10^{11} \text{ Ohm.}}$$

Der spezifische Widerstand ρ ist definiert als $\rho = \frac{1}{\sigma}$. Die anschauliche Bedeutung von ρ wird klar, wenn man in der Formel $R = \frac{\ell}{A\sigma}$ für ℓ die Längeneinheit und für A die Flächeneinheit einsetzt. ρ entspricht dem Widerstand, den man zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen des Einheitswürfels messen würde.



Aus $\rho = \frac{RA}{\ell}$ ergibt sich die Dimension

$$[\rho] = \text{Ohm} \cdot \text{m} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad [\rho] = \text{statohm} \cdot \text{cm} \quad \text{in e.s.u.}$$

Die Umrechnung ergibt

$$1 \text{ statohm} \cdot \text{cm} = 9 \cdot 10^9 \text{ Ohm} \cdot \text{m}.$$

Entsprechend gilt für die Leitfähigkeit

$$[\sigma] = \text{Ohm}^{-1} \text{m}^{-1} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad [\sigma] = \text{statohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \quad \text{in e.s.u.}$$

$$1 \text{ statohm}^{-1} \text{cm}^{-1} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{ Ohm}^{-1} \text{m}^{-1}.$$

2.2.2. Die Joule'sche Wärme.



Betrachte wieder ein Stück eines prismatischen Leiters vom Querschnitt A. Eine Batterie sorgt dafür, dass im Leiter ein elektrisches Feld \vec{E} aufrechterhalten wird, sodass ein Strom I fließt. Pour fixer les idées nehmen wir an, dass die positiven Ladungsträger beweglich seien. Durch die Fläche (1) treten sie in das betrachtete Volumen ein, und durch die Fläche (2) verlassen gleichviele Ladungsträger das Volumen. Die Reibung oder die Zusammenstöße sorgen dafür, dass die Ladungsträger nicht beschleunigt werden. In der Zeit dt tritt durch die Fläche (1) die Ladung $I dt$ ein und durch die Fläche (2) tritt gleichzeitig die Ladung $I dt$ aus. Effektiv ist die Ladung $I dt$ von (1) nach (2) transportiert worden. Die dabei geleistete Arbeit $(V_1 - V_2) I dt = V I dt$ ist ganz in Wärme umgewandelt worden. Mit $V = IR$ ist die Wärmeproduktion pro sec

$$N = I^2 R$$

Mit $R = \frac{l}{\sigma A}$ und $I = \sigma E A$ wird die Wärmeproduktion pro sec im Einheitsvolumen

$$\frac{N}{\text{Vol}} = \sigma E^2$$

2.3. Bemerkungen zur Leitfähigkeit der Metalle

Die Leitfähigkeit der Elektrolyte lässt sich mit dem auf S. 75-78 eingeführten Modell verstehen, wenn man es genügend verfeinert. Das naive Modell des Elektronengases von S. 80 bringt uns hingegen einem Verständnis der metallischen Leitfähigkeit nicht näher. Die klassische Mechanik versagt bei der Erklärung des Verhaltens des Elektronengases. Die Leitungselektronen müssen nach der Quantenmechanik als

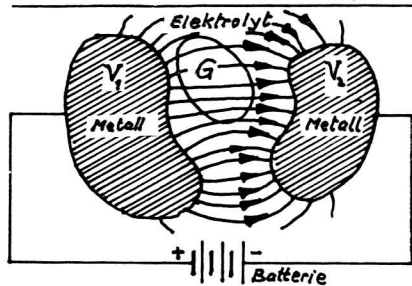
Materiewellen betrachtet werden. Der elektrische Widerstand kommt dadurch zustande, dass das Gitter der positiven Ionen Abweichungen hat von strenger Periodizität, und zwar

- a) wegen den thermischen Gitterschwingungen
- b) wegen Gitterfehlern (z.B. Leerstellen, Fremdatome).

Die Abweichung a) erklärt die Zunahme des Widerstandes mit steigender Temperatur und b) erklärt (zum Teil) den temperaturunabhängigen Anteil. Dass diese einfachen Ideen aber niemals genügen können zum vollen Verständnis der elektrischen Leitfähigkeit, zeigt das Phänomen der Supraleitung: Es gibt sehr viele Metalle und Legierungen, bei denen der Widerstand bei tiefen Temperaturen ($T \lesssim \text{einige K}$) auf null springt.

2.4. Das Stromdichtefeld und die Kontinuitätsgleichung

2.4.1. Das Stromdichtefeld im stationären Zustand



Beispiel: Zwei Metallkörper, deren Leitfähigkeit sehr gross ist, werden in einen Elektrolyten mit einer rund 10^6 mal kleineren Leitfähigkeit eingetaucht und mit einer Batterie verbunden, die die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ konstant hält. Wegen dem Leitfähigkeitsver-

hältnis liegt praktisch die ganze Potentialdifferenz über dem Elektrolyten, und die Metallkörper können in guter Näherung als Äquipotentialgebiete betrachtet werden.

Wie berechnet man das Stromdichtefeld \vec{i} ?

Wir befassen uns nur mit dem stationären Zustand, d.h. das Stromdichtefeld soll zeitunabhängig sein. Es sollen sich in diesem Beispiel im Elek-

trolyten im Laufe der Zeit keine Raum- oder Flächenladungen anhäufen. Das ist erfüllt, wenn sich die Ladungsträger an den Elektroden entladen können (S. 74). Betrachte nun im Felde \vec{i} eine Fläche A , die ein Gebiet G im Elektrolyten umschliesst. Da sich die Ladung innerhalb G nicht verändern darf (sie bleibt null), gilt

$$\iint_A \vec{i} \cdot d\vec{f} = 0, \text{ oder umgeformt mit dem Satz von Gauss}$$

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{i} \, d\tau = 0 \quad \text{Dies gilt für jedes Gebiet, also auch für jedes Volumenelement, d.h. wir haben}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{i} = 0}$$

Wir beschränken uns auf isotrope Ohm'sche Leiter und setzen $\vec{i} = \sigma \vec{E}$, wobei σ eine von \vec{E} unabhängige skalare Grösse ist. Es ist dann bei einem homogenen Elektrolyten

$$\operatorname{div} \vec{i} = \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = \sigma \operatorname{div} \vec{E}, \text{ sodass } \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

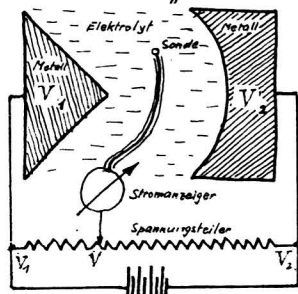
Obwohl wir nicht mehr Elektrostatik treiben, gilt immer noch $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. Wenn dies nicht so wäre, könnte man den Elektrolyten durch Kreiströme aufheizen ohne dass die Batterie Energie liefert. Es gilt also auch bei diesem Problem die Gleichung von Laplace $\Delta V = 0$ (vgl. S. 30/31). Wenn an der Grenzfläche Metall/Elektrolyt keine elektrochemisch bedingten Potentialsprünge auftreten — man kann solche vermeiden durch fleissiges Umpolen, d.h. durch Verwendung von Wechselspannung — dann ist das Potentialfeld durch dieselbe Lösung der Laplace-Gleichung gegeben wie im Falle des Vakuums zwischen den metallischen Elektroden. \vec{E} ergibt sich dann als $-\operatorname{grad} V$ und \vec{i} als $\sigma \vec{E}$.

Anwendungen.

① Der elektrolytische Tank als Analogrechner.

Im der Technik stellt sich oft die Aufgabe, die Lösung der Laplace-Gleichung für komplizierte Randbedingungen zu suchen. Technisch ist es sehr einfach, das Potentialfeld $V(x, y, z)$

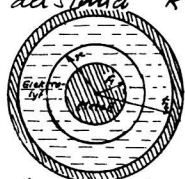
in einem Elektrolyten auszumessen, viel einfacher als im Vakuum. Man gibt die gewünschten Randbedingungen vor, indem man Metallelektroden in den Elektrolyten eintaucht und ihnen bestimmte Potentiale gibt.



Zur Bestimmung der Äquipotentialflächen führt man eine Sonde, die über einen (isolierten) Draht und über einen empfindlichen Stromanzeiger auf dem gewünschten Potential V gehalten wird, in den Elektrolyten ein. Zeigt der Stromanzeiger keinen Strom an, dann ist die Sonde auf dem Potential V . Sie stört dann das Potentialfeld nicht, vorausgesetzt dass ihre Zuleitung eine isolierende Hülle hat und sehr dünn ist.

② Berechnung des Widerstandes zwischen zwei in einem Elektrolyten eingetauchten Elektroden.

Beispiel: Der Raum zwischen zwei konzentrischen Metallkugeln mit den Radien r_1 und r_2 sei mit einem Elektrolyten der Leitfähigkeit σ gefüllt. Welchen Widerstand R misst man zwischen den beiden Kugeln?



Da sich im stationären Zustand im Elektrolyt keine Ladung anhäuft, ist der Gesamtstrom, der durch eine beliebige geschlossene Fläche fließt, die im Elektrolyten verläuft und die innere Kugel umschließt, immer gleich I . Aus Symmetriegründen betrachtet man eine konzentrische Kugel vom Radius r , sodass

$$4\pi r^2 i(r) = I, \text{ also } i(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \text{ und } E(r) = \frac{1}{\sigma} i(r) = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallkugeln ist

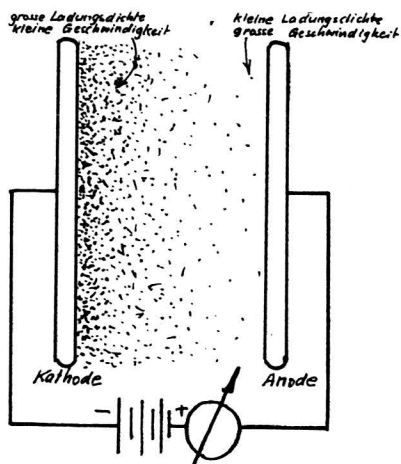
$$V_1 - V_2 = V = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Der Widerstand ist definiert als $R = \frac{V}{I}$, sodass

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

2.4.2. Das stationäre Stromdichtefeld bei nicht-Ohm'schem Ladungstransport

Auf S. 86 wurde gezeigt, dass das Stromdichtefeld \vec{i} in einem ohm'schen, homogenen und isotropen Leiter so beschaffen ist, dass $\text{div } \vec{E} = 0$ im Leiter. Da $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$, bedeutet dies, dass auch keine Raumladungen auftreten (Es wäre interessant, zu untersuchen, wie weit die Voraussetzungen der Homogenität und Isotropie notwendig sind.) Was im stationären Zustand immer gilt, ist $\text{div } \vec{i} = 0$. Wir wollen nun einmal einen nicht-ohm'schen Fall betrachten, nämlich Elektronen, die im Vakuum durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden. Auch wenn dann das einzelne Elektron keine stationäre Geschwindigkeit mehr hat, so kann eine Ladungswolke aus sehr vielen Elektronen, makroskopisch betrachtet, doch stationär sein. (Es dürfen z.B. auf der einen Seite der Wolke N Elektronen pro sec mit der Geschwindigkeit



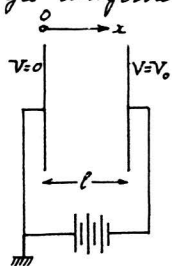
v_1 eintreten und auf der anderen Seite dürfen N Elektronen pro sec die Wolke mit einer anderen Geschwindigkeit v_2 verlassen. Die Ladungsdichte kann dann stationär sein. Das klassische Beispiel für einen solchen Fall ist obenstehend skizziert:

Eine ebene Kathode (z.B. eine Glühkathode) im Vakuum sei so konstruiert, dass im Prinzip beliebig

viele Elektronen pro sec austreten könnten ins Vakuum. der Kathode gegenüber liegt eine ebene Anode, in die im Prinzip beliebig viele Elektronen pro sec eintreten können aus dem Vakuum. Trotzdem fließt kein unendlich grosser Strom, wenn eine konstante Potentialdifferenz V_0 zwischen Anode und Kathode angelegt wird; denn es bildet sich eine inhomogene Raumladung aus, deren elektrisches Feld sich dem angelegten Feld überlagert und so verhindert, dass beliebig viele Elektronen pro sec die Kathode verlassen. Die Lösung des Problems findet man in A. Sommerfeld, "Vorlesungen über theoretische Physik", Band III:

Man geht davon aus, dass der Zustand stationär sein soll. Die Zeit geht dann nicht ein, und es ist $\text{div } \vec{i} = 0$. Wenn ferner der Abstand zwischen Kathode und Anode klein ist im Vergleich zum Durchmesser, kann das Problem als eindimensional betrachtet werden. Es ist dann $\text{div } \vec{i} = \frac{di}{dx} = 0$, also $i(x) = i$. Nach S. 74 ist bei nur einer Sorte von Ladungsträgern $i = nq v$, wobei $nq = \rho$, also $i = \rho v$. Im unserem Falle also $\rho(x) = \frac{i}{v(x)}$.

Im Vakuum herrscht keine Reibung, sodass die potentielle Energie der Ladungsträger im elektrischen Felde ganz in kinetische Energie umgewandelt wird.^{*)} Für die in der Skizze festgelegte Normierung



des Potentials ist die kinetische Energie eines Elektrons im Abstand x von der Kathode gegeben durch

$$\frac{1}{2} m v^2(x) = q V(x), \text{ sodass } v(x) = \left(\frac{2q V(x)}{m} \right)^{1/2}$$

Für $V(x)$ gilt die Poisson Gleichung (S. 35)

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) = -\frac{i}{\epsilon_0 v(x)}, \text{ sodass}$$

$$\left(V(x) \right)^{1/2} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{i}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} = \text{const} = B$$

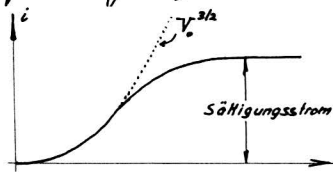
Ein Potenzansatz $V(x) = A x^\alpha$ ist naheliegend. Durch Einsetzen

*) Dies gilt nicht streng. Wir werden später einsehen, dass eine beschleunigte Ladung elektromagnetische Wellen abstrahlt. In einer praktischen Vakuum-Diode ist dieser Effekt vernachlässigbar.

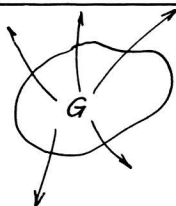
erhält man $A^{3/2} \alpha (\alpha-1) x^{(\frac{3}{2}\alpha-2)} = B$. Da dies erfüllt sein muss für alle Werte, die x annehmen kann, folgt $\frac{3}{2}\alpha-2=0$ also $\alpha = \frac{4}{3}$.
Damit wird $A = \left(\frac{9}{4}B\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{9}{4} \cdot \frac{i}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2}\right]^{3/2}$. Für $x=l$ ist $V(x) = V_0$,
so dass $V_0 = A l^\alpha = \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{l^2}{\epsilon_0 \sqrt{2q/m}}\right)^{3/2} i^{2/3}$ und schliesslich

$$i = \frac{4}{9} \cdot \frac{\epsilon_0 \sqrt{2q/m}}{l^2} V_0^{3/2} \quad \text{"Raumladungsgesetz"}$$

Bei praktischen Elektronenröhren gilt $i \propto V_0^{3/2}$ nur bei kleinen Spannungen, weil die Kathode nicht beliebig viele Elektronen pro sec emittieren kann. Bei höheren Spannungen entspricht i der Anzahl der Elektronen, die pro sec von der Kathode geliefert werden können. Man spricht dann vom Sättigungsstrom (Demonstration).



2.4.3. Nichtstationäre Ströme



Wir betrachten Fälle, wo die Ladungsverteilung zeitlich ändert. Aus einem Gebiet G im Stromdichtefeld kann dann mehr Ladung herausfließen als hinein, oder umgekehrt:

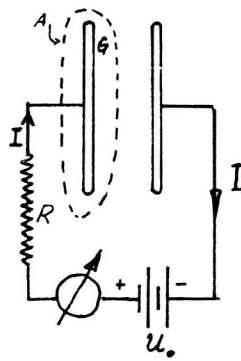
$$\underbrace{\iint_{\text{Fläche, die } G \text{ umschliesst}} \vec{i} \cdot d\vec{f}}_{\text{pro sec ausströmend aus } G} = - \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_G \rho(x,y,z,t) d\tau}_{\text{Abnahme der Ladung in } G \text{ pro sec}} = - \iiint_G \frac{\partial}{\partial t} \rho(x,y,z,t) d\tau$$

durch Anwendung des Satzes von Gauss aus der Vektoranalysis wird

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{i} d\tau = - \iiint_G \frac{\partial}{\partial t} \rho(x,y,z,t) d\tau \quad \text{für jedes beliebige Gebiet } G, \text{ sodass}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad \text{dies ist die Kontinuitätsgleichung. Sie gewährleistet die Ladungserhaltung (S.4/5).}$$

Beispiel: Ein Kondensator werde über einen Widerstand R an eine Batterie angeschlossen. Er lädt sich dann auf, und

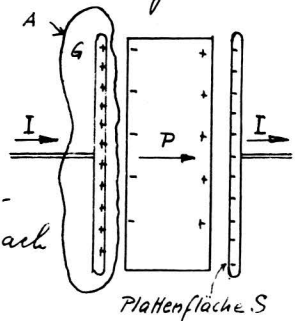


die Ladung in einem Gebiet G , das eine der beiden Kondensatorplatten enthält, nimmt zu. Die Integralform der Kontinuitätsgleichung auf dieses Gebiet angewendet lautet

$$\underbrace{\iint_A \vec{I} \cdot d\vec{f}}_{-I} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \rho \, d\tau}_{\text{Ladung } Q \text{ der Platte}} = - \frac{dQ}{dt}$$

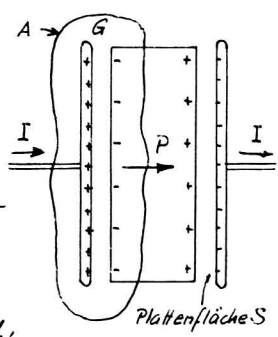
also ist $\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$ der Strom in der Zuleitung zu einer Kondensatorplatte.

Wenn sich ein Dielektrikum zwischen den Platten des Kondensators befindet, dann gelangt man zum gleichen Resultat. Man sieht dies sofort ein, wenn man die Integrationsfläche A zwischen der Kondensatorplatte und dem Dielektrikum hindurch legt. Innerhalb A befindet sich dann nur die Ladung $Q = |\sigma_L|S$, und diese ist ja nach S. 56 die Ladung Q des Kondensators.



2.4.4. Der Polarisationsstrom im Dielektrikum

Man kann die Integrationsfläche A auch durch das Dielektrikum hindurch legen. Die von A umschlossene Ladung ist dann nicht $|\sigma_L|S$, sondern $(|\sigma_L| - |\sigma_{pol}|)S$. Der totale Strom, der in G eintritt, ist damit $I_{tot} = \frac{d}{dt} (|\sigma_L| - |\sigma_{pol}|)S$. Der eintretende Leitungsstrom ist nach wie vor $I_{Lst} = \frac{d}{dt} |\sigma_L|S$, also grösser als I_{tot} . Aus G muss also ein Strom der Stärke $\frac{d}{dt} |\sigma_{pol}|S$ austreten: Er tritt aus durch die Fläche, die im Dielektrikum verläuft; denn während des

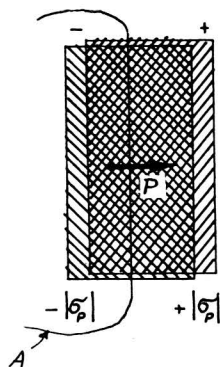


Prozesses der Polarisierung des Dielektrikums verschieben sich darin positive und negative Ladungen in entgegengesetzter Richtung (vgl. S. 53). Der entsprechende Strom fließt nur, solange sich die Polarisation \vec{P} zeitlich ändert. Er wird Polarisationsstrom genannt. Seine Dichte i_{pol} ist offensichtlich gegeben durch

$$i_{\text{pol}} = \frac{d}{dt} |\sigma_{\text{pol}}|, \text{ wobei nach S. 54 } |\sigma_{\text{pol}}| = P, \text{ sodass}$$

$$i_{\text{pol}} = \frac{dP}{dt}, \text{ und etwas verallgemeinert}$$

$$\vec{i}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

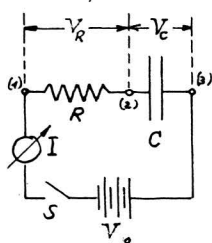


Wenn man in der Kontinuitätsgleichung die Polarisationsladungen in der Ladungsdichte einschliesst, dann muss man in der Stromdichte auch den Polarisationsstrom einschliessen.

2.4.5. Das RC-Glied als Schaltelement.

Kombinationen von Widerständen und Kapazitäten spielen in der Elektrotechnik eine grosse Rolle. Der einfachste Fall sei hier besprochen:

a) Aufladen eines Kondensators C über einen Widerstand R .



Der Kondensator sei anfänglich ungeladen. Zur Zeit $t=0$ wird der Schalter S geschlossen. Gesucht sind der Strom $I(t)$, sowie die Potentialdifferenzen $V_R(t)$ und $V_C(t)$.

Nach dem Einschalten liegt zwischen den Punkten (1) und (3) die konstante (von der Batterie aufrechterhaltene) Potentialdifferenz V_0 . Aus der Definition des Potentials folgt unmittelbar, dass sich die Potentialdifferenzen V_R und V_C algebraisch addieren. Aus der Definition des Widerstandes ($R = \frac{V_R}{I}$) und der Kapazität ($C = \frac{Q}{V_C}$)

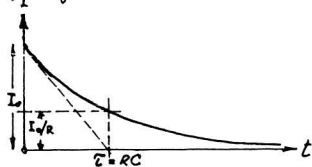
folgt dann $V_o = RI + \frac{Q}{C}$.

Da R , C und V_o zeitlich konstant sind, ist die Ableitung der Gleichung nach der Zeit

$$0 = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I \quad \text{also} \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

Die Lösung ist $I(t) = I_o e^{-t/RC}$

Die Integrationskonstante I_o ergibt sich aus den Anfangsbedingungen ($t=0$, $V_c=0$ also $V_R=V_o$) zu $I_o = \frac{V_o}{R}$.



Der Strom sinkt exponentiell mit der Zeit.

In der charakteristischen Zeit $\tau = RC$

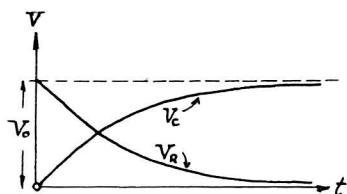
ist er auf den e -ten Teil gesunken
die "Zeitkonstante" des RC -Gliedes be-

trägt $\tau = RC$.

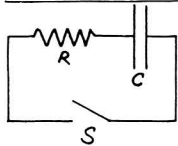
Für die Spannungen erhält man:

$$V_R(t) = RI(t) = V_o e^{-t/RC}$$

$$V_C(t) = V_o - V_R = V_o (1 - e^{-t/RC})$$



b) Entladen eines Kondensators über einen Widerstand.



Der Kondensator C sei anfänglich geladen und habe die Spannung V_o . Zur Zeit $t=0$ werde der Schalter S geschlossen.

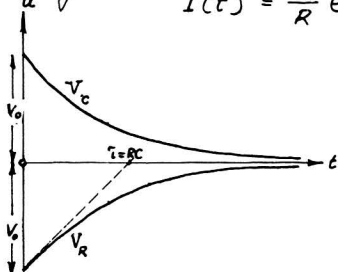
Für jede Zeit $t > 0$ gilt dann

$V_R(t) + V_C(t) = 0$, also $RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$. Die Ableitung dieser Gleichung nach t führt auf $R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$. Die Lösung ist $I(t) = \frac{V_o}{R} e^{-t/RC}$

Für die Spannungen erhält man

$$V_R = RI(t) = V_o e^{-t/RC}$$

$$V_C = -V_R = -V_o e^{-t/RC}$$

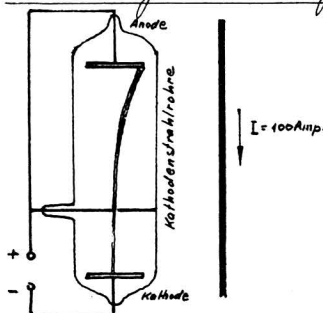


3. Das Magnetfeld stationären Ströme

3.1. Die Kraftwirkung zwischen Strömern

Zwei parallele Leiter ziehen sich an, wenn sie in gleicher Richtung von Strömen durchflossen werden. Sie stoßen sich ab, wenn die Ströme entgegengesetzt fließen. Fließt nur im einen Leiter ein Strom, dann beobachtet man keine Kraftwirkung. Es scheint also, dass die Bewegung der Ladungsträger in beiden Leitern für diese Kraft verantwortlich ist. Da die Leiter im ungeladenen Zustande gleich viele positive wie negative Elementarladungen enthalten, und da durch den Leitungsprozess keine Ladung in den Leiter gelangt, ohne dass eine gleiche Ladung den Leiter verlässt, müssen wir zunächst annehmen, dass auch die stromdurchflossenen Leiter ungeladen sind. Die beobachteten Kräfte können also nicht gedeutet werden wie etwa die Anziehung zweier Kondensatorplatten. Das geht schon daraus hervor, dass die Kräfte nicht geändert werden, wenn der Raum mit einem (unmagnetischen) Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ϵ gefüllt wird. (Man kann dies mit der Stromwaage demonstrieren, die wir zur Definition des Ampère benutzt haben; vgl. S. 8).

Wirkt die Kraft auf das "Leitermaterial" oder auf die bewegten Ladungsträger? Nimmt man anstelle eines



der beiden Leiter einen Elektronenstrahl im Vakuum, dann sieht man, dass der Strahl vom Leiter angezogen wird, wenn die Strahlelektronen parallel zu den Leitungselektronen fliegen, und dass er abgestossen wird, wenn die

Strahlenelektronen antiparallel zu den Leitungselektronen laufen. Das Experiment zeigt also, dass die diskutierte Kraft direkt auf die bewegten Ladungsträger wirken muss. Mit der Spiegelbildkraft kann sie aber nichts zu tun haben, trotz der Nähe des Leiters, denn die Spiegelbildkraft ist immer anziehend und unabhängig vom Strom im Leiter (Eine nähere Betrachtung zeigt überdies, dass sie im beschriebenen Experiment völlig vernachlässigt werden kann.)

Im Grunde genommen sollte man noch einen Versuch machen mit parallelen Elektronenstrahlen. Nur haben aber solche Strahlen im Gegensatz zum stromdurchflossenen Leiter eine resultierende Ladung. Zur hier diskutierten Kraft kommt noch die elektrostatische Abstossung hinzu, und diese wäre viel grösser als die hier zur Diskussion stehende Kraft.

3.2. Die Lorentz - Kraft und das Feld \vec{B}

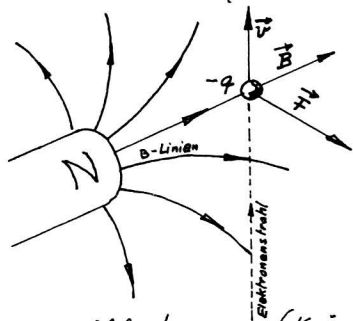
Der Elektronenstrahl lässt sich nicht nur durch einen Leitungsstrom ablenken, sondern auch durch einen Magneten. Offenbar wirkt auf die bewegten Ladungsträger im "Felde eines Magneten" eine Kraft \vec{F} . Diese Kraft \vec{F} lässt sich beschreiben, wenn man ein neues Vektorfeld \vec{B} einführt, welches "magnetische Induktion" (gelegentlich ungenau "Magnetfeld") genannt wird.

Dieses Feld \vec{B} hängt mit der Kraft \vec{F} in ganz anderer Weise zusammen als das Feld \vec{E} mit der Kraft auf eine ruhende Ladung q . Im letzteren Falle gilt nach S. 16 $\vec{F} = q \vec{E}$. In die neue Beziehung muss eine Grösse eingehen, die die Bewegung des Ladungsträgers charakterisiert. Dass das Feld \vec{B} verschieden ist vom Felde \vec{E} zeigt sich auch darin, dass es durch die Anwesenheit von ruhenden leitenden Körpern oder ruhenden Dielek-

trika nicht beeinflusst wird (wenigstens solange diese nicht supra-leitend bzw. magnetisierbar sind).

Die Ablenkung des Elektronenstrahls durch einen strom-durchflossenen Leiter zeigt, dass ein \vec{B} -Feld nicht nur durch magnetisierte Materie (Stabmagnet, Hufeisenmagnet), sondern auch durch Leitungsströme erzeugt werden kann. Ähnlich wie das Feld \vec{E} kann auch das Feld \vec{B} durch "Feldlinien" veranschaulicht werden.

Die Feldlinien von \vec{B} können auf experimentellen Wege z.B. wie folgt konstruiert werden: Als Indikator des Feldes nimmt man eine kleine Magnetnadel. Sie stellt sich parallel zum Vektor \vec{B} . Der Richtungssinn wird durch eine Konvention festgelegt. Der Nordpol der Nadel (d.h. das Ende, welches im Erdfeld nach Norden zeigt) gibt die Pfeilrichtung an. Die Feldlinie, die durch einen bestimmten Punkt A geht, wird erhalten, indem man den Drehpunkt der Nadel nach A bringt, die Tangente an die Feldlinie bestimmt, den Drehpunkt längs der Tangente um eine infinitesimale Strecke verschiebt, in der neuen Lage die Feldrichtung bestimmt usw. (Wenn man die B-Linien sichtbar macht durch Streuen von Eisenpulver, führt man im wesentlichen diese Operation aus.)



Der Stabmagnet werde so vor die Kathodenstrahlröhre gehalten, dass der Elektronenstrahl senkrecht zur Achse des Magneten verläuft. Aus der resultierenden Ablenkung (Krümmung) des Strahls kann man dann folgenden qualitativen Schluss ziehen:

\vec{F} ist senkrecht zu \vec{B} und senkrecht zur Geschwindigkeit \vec{v} der Elektronen im Strahl.

Eine quantitative Analyse der Bahn der Elektronen in einem Raume, in dem kein elektrisches Feld \vec{E} herrscht (z.B. im oberen Teil der auf S.94 skizzierten Kathodenstrahlröhre), würde wegen

$$\vec{F} \text{ proportional zu } q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Diese Kraft wird Lorentz-Kraft genannt nach dem holländischen Physiker H.A. Lorentz (1853-1928), welcher obigen Ausdruck schon um 1879 hinschrieb. Wenn noch zusätzlich ein elektrisches Feld \vec{E} herrscht, dann addiert sich noch die Kraft $q\vec{E}$. Im dieser Vorlesung wollen wir provisorisch unter Lorentz-Kraft nur die vom Felde \vec{B} herrührende Kraft verstehen. (Diese rein didaktische Abmachung verliert ihren Sinn, sobald man die Elektrodynamik vom Standpunkt der Relativitätstheorie aus betrachtet).

Da wir die Begriffe Kraft, Ladung und Geschwindigkeit kennen und diese Größen auch messen können, ist es naheliegend, das Feld \vec{B} mit Hilfe der obigen Beziehung zu definieren und zu messen.

Die Massenheit der Feldstärke B wird festgelegt durch die Wahl des Proportionalitätsfaktors.

Im e.s.u. - System schreibt man

$$\vec{F} = \frac{1}{c} q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit (in cm/sec) bedeutet. Die durch diese Gleichung definierte Massenheit der magnetischen Induktion B heisst Gauss (C.F. Gauss 1777-1855)

Indem man dem Proportionalitätsfaktor die Dimension einer reziproken Geschwindigkeit gibt, erhält man \vec{B} dieselbe Dimension wie \vec{E} , nämlich $\frac{\text{dyn}}{\text{statcoulomb}}$ (vgl. S.16). (Dies ist historisch bedingt: Ursprünglich formulierte man die Magnetostatik ganz analog zur Elektrostatik durch Einführung von "magnetischen Polstärken", welche

mathematisch wie Ladungen behandelt wurden. Da es keine "magnetischen Ladungen" gibt, ist eine solche Formulierung vom physikalischen Standpunkt aus sinnlos, obwohl sie zu richtigen Ergebnissen führen kann.)

Im SI schreibt man

$$\vec{F} = q [\vec{v} \times \vec{B}]$$

Da damit festgelegte Maßeinheit der Feldstärke B wird Tesla genannt. Aus der Gleichung folgt ferner

$$1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{Newton sec}}{\text{Coulomb m}}, \text{ und mit } 1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{Newton m}}{\text{Coulomb}}$$

$$1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{Volt sec}}{\text{m}^2}$$

Umrechnung: $1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$

Größenordnungen des Feldes \vec{B} :

Magnetfeld der Erde an der Erdoberfläche	10^{-1} Gauss
Permanenter Stabmagnet 10 cm vom Ende	10^2 Gauss
Laboratoriums-Elektromagnet mit Eisenkern	10^4 Gauss
Supraleitende Spulen	10^5 Gauss
Gepulste, normalleitende Spulen	10^6 Gauss

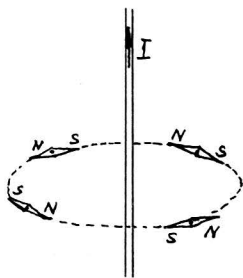
3.3. Ströme als Erzeuger des Feldes \vec{B}

Das Feld \vec{B} wird immer durch Ströme erzeugt. Diese Ströme brauchen aber nicht Leitungsströme zu sein, wie das Beispiel der permanenten Magneten zeigt. Das Feld \vec{B} eines permanenten Magneten wird durch Ströme erzeugt, die in den Atomen zirkulieren. Diese Ströme werden "Molekularströme" genannt. (Der Name ist nicht ganz zutreffend.)

3.3.1. Das Feld \vec{B} des unendlich langen, geraden Leiters.

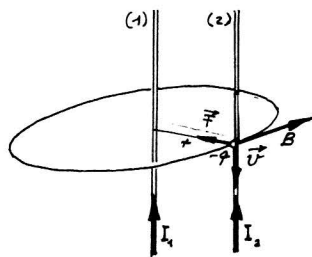
Das Experiment zeigt, dass die Feldlinien bei einem Draht (oder bei einem Leiter mit Kreisquerschnitt) konzentrische

Kreise sind in Ebenen senkrecht zur Leiterachse. Aus Symmetriegründen kann der Betrag von \vec{B} nur vom Abstand r von der Leiterachse abhängen. Für Punkte ausserhalb des Leiters findet man experimentell



$$B \text{ proportional } \frac{I}{r}$$

Der Proportionalitätsfaktor kann hier nicht mehr willkürlich festgelegt werden; denn die Masseneinheiten sind alle schon definiert. Tatsächlich kann man ihn berechnen, ausgehend von der Definition der Stromstärkeinheit basierend auf der Kraftwirkung zwischen zwei unendlich langen, geraden, parallelen Leitern (S. 8-12):



Wir fassen den ersten Leiter auf als Erzeuger des Feldes \vec{B} . Im zweiten Leiter betrachten wir die Lorentzkraft \vec{F} , welche auf die Ladungsträger q wirkt, die sich im magnetischen Felde \vec{B} mit der Driftgeschwindigkeit v

parallel zur Leiterachse bewegen. Die Lorentzkraft steht senkrecht auf der Leiterachse und liegt in der Ebene der beiden Leiter. Da die Ladungsträger die Leiter seitlich nicht verlassen können, übertragen sich die Lorentzkräfte auf ihn. Um die Rechnung nicht unnötig zu komplizieren, nehmen wir sehr dünne Drähte an. Die Leitungselektronen bewegen sich entgegengesetzt zur Richtung des konventionellen positiven Stromes.

e.s.u.-System: Wir berechnen die Kraft \vec{F}_{tot} , die auf ein Stück der Länge ℓ des Leiters (2) wirkt. Der Leiterquerschnitt sei A . Beim Strom I_2 ist dann nach S. 74 die Geschwindigkeit der Ladungsträger gegeben durch $v = \frac{I_2}{n q A}$, wobei n die Anzahl der Ladungsträger pro cm^3 bedeutet. Die Lorentzkraft auf einen einzelnen Ladungsträger ist nach S. 97 $F = \frac{1}{c} q \frac{I_1}{n q A} B = \frac{1}{c} \frac{I_1 B}{n A}$.

die Kraft auf die $n\Delta l$ im betrachteten Leiterstück enthaltenen Ladungsträger wird damit

$$F_{\text{tot}} = \frac{1}{c} \ell I_2 B.$$

Dieses Ergebnis ist nun zu vergleichen mit dem Ausdruck für die Anziehungskraft zwischen parallelen Strömen I_1 und I_2 . Wenn I in Magampère gemessen wird, ist nach S. 8 $F = \frac{2\ell}{r} I_1 I_2$. Da 1 Magampère = $3 \cdot 10^{10}$ statampère (S. 10), lautet die Formel in e.s.u.

$$F = \frac{2\ell}{c^2 r} I_1 I_2 \quad \text{Der Vergleich der beiden Ausdrücke liefert}$$

$$B = \frac{2}{c} \cdot \frac{I}{r} \quad \text{in e.s.u.}$$

Im SI führt die analoge Betrachtung auf

$$B = \frac{2\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Das Beispiel des langen, geraden Leiters illustriert eine ganz fundamentale Eigenschaft des Feldes \vec{B} :

Die \vec{B} -Feldlinien sind immer geschlossene Kurven

Das Feld \vec{B} unterscheidet sich damit grundlegend vom Felde \vec{E} einer statischen Ladungsverteilung. Die Feldlinien des elektrostatischen Feldes gehen von positiven Ladungen aus und enden auf negativen Ladungen oder im Unendlichen.

Nach den bisher anerkannten Erfahrungen geht das Feld \vec{B} nie von "magnetischen Ladungen" d.h. von magnetischen Monopolen aus. Damit wäre immer $\text{div } \vec{B} = 0$

3.3.2. Das Zirkulationsintegral der magnetischen Induktion.

Im elektrostatischen Felde \vec{E} fanden wir als Folge des Energiesatzes, dass das Linienintegral $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ unabhängig ist vom Weg. Gibt es für das Feld \vec{B} einen ähnlichen Satz? Da die \vec{B} -Linien geschlossene Kurven sind, ist es zunächst naheliegend das Zirkulationsintegral

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ längs einer \vec{B} -Linie zu betrachten. Für das Beispiel des langen, geraden Leiters wird offensichtlich

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = 2\pi r \frac{2}{c} \frac{I}{r} = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{in e.s.u.}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = 2\pi r \frac{\mu_0}{2r} \frac{I}{r} = \mu_0 I \quad \text{im SI}$$

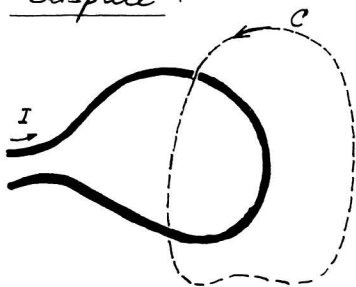
Für den langen, geraden Leiter lässt sich auf mathematischem Wege noch verhältnismässig einfach zeigen, dass das Zirkulationsintegral für jeden Weg, der den Leiter einmal umschliesst, den oben berechneten Wert hat.

Viel interessanter ist aber, dass das Zirkulationsintegral auch unabhängig ist von der Gestalt des Leiters. Diese Aussage wollen wir hier als experimentelle Tatsache hinnehmen.

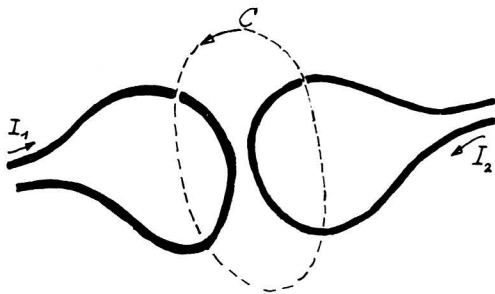
Für jeden Weg, der einen stationären Strom I einmal umschliesst, gilt

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{in e.s.u.}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad \text{im SI}$$

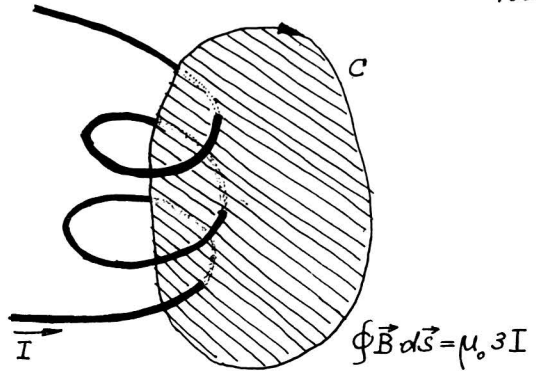
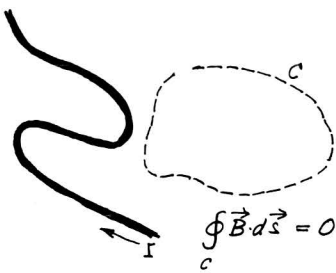
Beispiele:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$



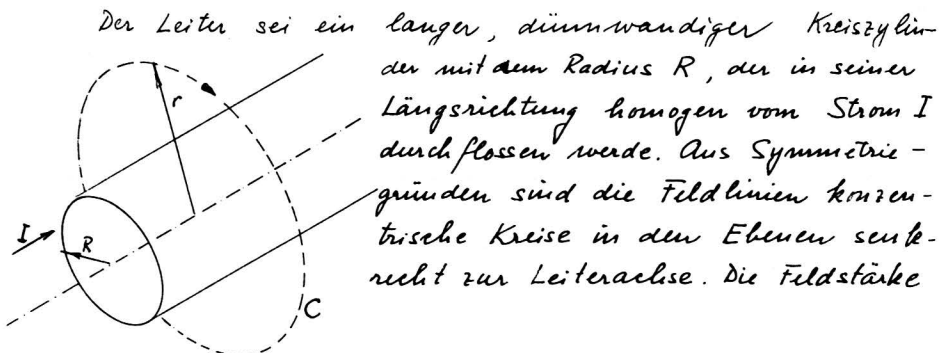
Allgemein :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{tot}}, \text{ wobei } I_{\text{tot}} = \text{resultierender Strom durch eine von } C \text{ berandete Fläche}$$

3.3.3. Anwendung des Zirkulationsintegrals bei der Berechnung des Feldes \vec{B}

Mit Hilfe des Zirkulationsintegrals kann bei gewissen einfachen und hochsymmetrischen Leiteranordnungen das \vec{B} -Feld auf einfache Weise berechnet werden. Für viele in der Praxis vorkommenden Leittersysteme kann man so eine Näherung für die Feldstärke B finden.

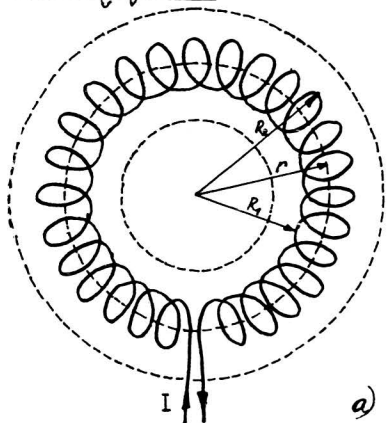
① Das B -Feld eines langen geraden Röhrenstromes.



$B(r)$ ergibt sich aus $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$ zu

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad \text{für } r > R \quad \text{und} \quad B(r) = 0 \quad \text{für } r < R.$$

② Ringspule: Ein dünner Kreisring ($R_2 - R_1 \ll R$) sei sehr dicht bewickelt mit vielen Windungen eines dünnen Drahtes. Die so entstandene Ringspule hat dann als Ganzen gesehen ungefähr die Symmetrie eines Kreisringes. Aus Symmetriegründen sind damit die \vec{B} -Linien in guter Approximation koaxiale Kreise, deren Achse mit der Ringachse zusammenfällt: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx 2\pi r B(r)$



a) Für $r < R_1$, $r > R_2$, und auch dann, wenn die Kreisebene den unwickelten Raum nicht schneidet, verschwindet der Gesamtstrom durch die Kreisfläche, d.h. $2\pi r B(r) = 0$. Als ist $B = 0$ außerhalb der Wicklung.

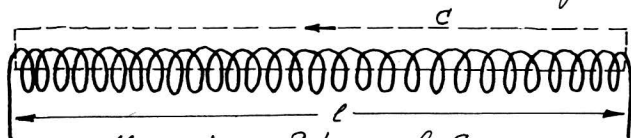
b) Wenn die Kreisebene den unwickelten Raum schneidet und der betrachtete Integrationsweg im Innern des unwickelten Raumes liegt, dann fließt der Strom I N -mal im selben Sinne durch die vom Integrationsweg herandete Fläche, wobei N die Windungszahl der Spule ist. Es ist dann $2\pi r B \approx \frac{\mu_0}{c} NI$, also

$$B \approx \frac{2}{c} \frac{NI}{r} \quad \text{Gauss}$$

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r} \quad \text{Tesla}$$

innerhalb des unwickelten Raumes.

③ Eine lange, schlanke Spule (Länge $l \gg$ Durchmesser d) bestehe aus sehr vielen (N) Windungen eines dünnen Drahtes.



Gesucht ist die Feldstärke B im Innern der Spule. Nach dem allgemeinen Satz auf S. 102 muss der Integrationsweg

nicht einer Feldlinie folgen. Im Innern der Spule ist das Feld annähernd homogen. Im Experiment mit Eisendrahtspänen erkennt man dies daran, dass die Feldlinien parallel verlaufen. Größere Abweichungen treten in der Nähe der Spulenden auf. Bei einer langen, schlanken, dicht bewickelten Spule ist das Feld auf der Aussenseite nahe bei der Wicklung sehr klein. Damit gilt für das Zirkulationsintegral auf dem eingezeichneten Wege C

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx lB$, wobei B die Feldstärke im unentwickelten Raum bedeutet. Da der Strom I im Draht N -mal durch die vom Integrationsweg umrandete Fläche hindurchtritt, ist $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 NI$, sodass

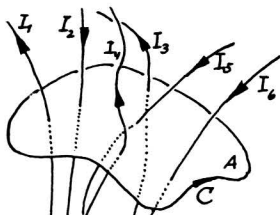
$$\boxed{B \approx \mu_0 \frac{NI}{l}} \quad \text{Tesla (SI)} \quad \text{und} \quad \boxed{B \approx \frac{4\pi}{c} \frac{NI}{l}} \quad \text{Gauss (e.s.u.)}$$

Die Approximation ist umso besser, je schlanker und dichter bewickelt die Spule ist.

3.3.4. Der Zusammenhang zwischen dem Vektorfeldern \vec{I} und \vec{B} .

Durch den Ausdruck für die Lorentz-Kraft (S.97) ist nicht nur die Stärke des Feldes \vec{B} , sondern auch dessen Richtung definiert. Die Ablenkung des Elektronenstrahls im Experiment von S.94 ist konsistent mit der auf S.99 stillschweigend angegebenen Richtung von \vec{B} :

Der Zirkulationssinn des Feldes \vec{B} entspricht einer Rechtsschraube, die in der Richtung des positiven Stromes vorwärtsgeschraubt wird.

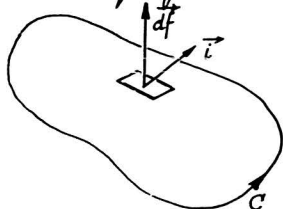


Betrachte ein Bündel von stromführenden Drähten, die durch eine Fläche A hindurchtreten, die von einer geschlossenen Kurve C berandet ist. Wenn wir den Um-

Laufsinus des Zirkulationsintegrals willkürlich so festlegen, wie in der Skizze angedeutet ist, dann sind die von unten nach oben durchtretenden Ströme positiv und die von oben nach unten durchtretenden Ströme negativ zu rechnen. Das Zirkulationsintegral ist damit durch die algebraische Summe der Ströme bestimmt:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_j I_j$$

Der Übergang zu einem kontinuierlichen Stromdichtefeld \vec{i} ist trivial:

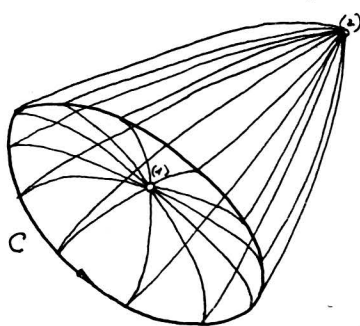


Der Stromfluss durch ein Flächenelement $d\vec{f}$ ist $dI = \vec{i} \cdot d\vec{f}$ (vgl. S. 20), sodass

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_A \vec{i} \cdot d\vec{f} \quad \text{im SI}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \iint_A \vec{i} \cdot d\vec{f} \quad \text{in e.s.u.}$$

Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf den Fall, wo sich das elektrische Feld \vec{E} im Raume zeitlich nicht ändert. Dies bedeutet, dass die Ladungsdichte ρ zeitlich konstant ist. Nach der Kontinuitätsgleichung ist dann $\text{div } \vec{i} = 0$ (S. 90). Die Konsequenz davon ist, dass bei gegebener Randkurve C der Stromfluss $\iint_A \vec{i} \cdot d\vec{f}$ nicht von der Fläche A abhängt: Betrachte als Fläche A_1 ein flaches Biekt mit dem Nabel (1) und als Fläche A_2 eine Zippelkappe mit der Spitze (2).

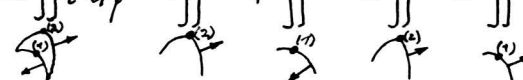


A_1 und A_2 bilden eine geschlossene Fläche. Wenn $d\vec{f}$ aus dem umschlossenen Gebiet heraus zeigt, gilt nach dem Satz von Gauss aus der Vektoranalysis

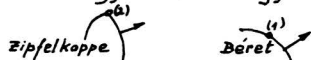
$$\iint \vec{i} \cdot d\vec{f} = \iiint_{\text{umschlossenes Gebiet}} \text{div } \vec{i} \, d\tau = 0$$

\uparrow
 $\text{div } \vec{i} = 0$

Die Umlaufrichtung der Kurve C muss mit der Richtung des Flächenelementvektors immer im selben Sinne verknüpft sein, nämlich im Sinne der Rechtsschraubenregel. Wir müssen deshalb den Flächenvektor des Biektts umkehren:

$$0 = \iint_{(1)} \vec{i} \cdot d\vec{f} - \iint_{(2)} + \iint_{(3)} = \iint_{(4)} - \iint_{(5)}$$


also $\iint_{(1)} \vec{i} \cdot d\vec{f} = \iint_{(2)} \vec{i} \cdot d\vec{f}$ q.e.d.



Das Zirkulationsintegral lässt sich nach dem Satz von Stokes aus der Vektoranalysis in ein Flächenintegral verwandeln.

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{f}$. A ist eine beliebige von C berandete Fläche. Nach S. 105 haben wir also die Gleichung

$$\iint_A \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{f} = \mu_0 \iint_A \vec{i} \cdot d\vec{f}$$

Da dies für eine beliebige (von C berandete) Fläche A gilt, sind die Integranden gleich:

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{i}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Diese Gleichung gilt nur für stationäre Zustände; denn sie impliziert $\text{div } \vec{i} = 0$. Das letztere ergibt sich übrigens auch aus der mathematischen Identität $\text{div rot} \equiv 0$. In \vec{i} sind alle Ströme eingeschlossen, die mit einem stationären Zustand verträglich sind. Dazu gehören sicher Leitungsströme \vec{i}_{leit} und die später zu behandelnden Molekularströme \vec{i}_{mol} (S. 134-137). Kritisch muss man gegenüber der obigen Gleichung sein, wenn Polarisationsströme im Spiele sind; denn diese können niemals stationär sein, da $\vec{i}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ (S. 92). Zeitabhängigkeiten bringen neue Aspekte, die wir erst später behandeln werden. (Vgl. S. 179/180)

3.3.5. Das Vektorpotential \vec{A}

Wir gehen aus von der fundamentalen, empirischen Tatsache, dass es keine magnetischen Monopole gibt, d.h. dass das Feld \vec{B} unter allen Umständen quellenfrei ist. Mathematisch lässt sich dies ausdrück-

ken durch die Gleichung

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (\text{vgl. S. 100}).$$

diese Gleichung ist automatisch erfüllt, wenn man \vec{B} als Rotation eines neuen Vektorfeldes \vec{A} darstellt; denn für jedes beliebige Vektorfeld \vec{A} gilt $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$. Man schreibt deshalb

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}} \quad \text{und nennt } \vec{A} \text{ das } \underline{\text{Vektorpotential}} \text{ von } \vec{B}.$$

Wenn das Feld \vec{B} gegeben ist, ist das Feld \vec{A} noch nicht eindeutig bestimmt: Sei $\vec{A} = \vec{A}' + \operatorname{grad} \alpha$, wobei α ein beliebiges skalares Feld ist. (Wir fordern nur, dass die Dimension von $\operatorname{grad} \alpha$ mit derjenigen von \vec{A} übereinstimmt). Wenn $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, dann ist auch $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}'$; denn die Vektoranalysis lehrt, dass $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \alpha = 0$.

Wir sind frei, das Feld $\operatorname{grad} \alpha$ so zu wählen, dass $\operatorname{div} \operatorname{grad} \alpha = -\operatorname{div} \vec{A}'$. Ohne Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit der Beziehung $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ können wir also fordern, dass

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$$

Berechnung des Vektorpotentials aus dem Stromdichtefeld.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{i}$$

Betrachte die x -Komponente dieser Vektorgleichung:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \mu_0 i_x$$

Die Reihenfolge der Differentiation spielt keine Rolle bei ausständigen Funktionen, sodass

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 i_x$$

Durch Subtraktion und nachfolgende Addition von $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ wird

$$-\underbrace{\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right)}_{\Delta A_x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)}_{\operatorname{div} \vec{A}} = \mu_0 i_x$$

mit der Festlegung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ wird

$$\Delta A_x + \mu_0 i_x = 0$$

die Poisson-Gleichung für das elektrostatische Potential V ist von derselben Form: $\Delta V + \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$ (vgl. S. 35). Die allgemeine Lösung findet man auf S. 20:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Damit gilt auch

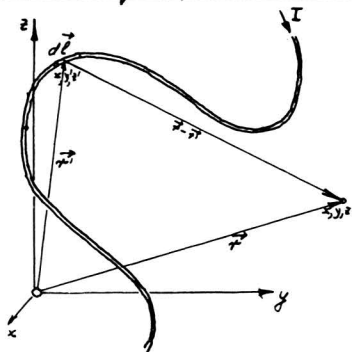
$$A_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_x(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad \text{und ana-}$$

log für die anderen Komponenten. Damit ist das Vektorpotential

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad \text{im SI.}$$

Die Integration erstreckt sich über den ganzen Raum.

Anwendung auf lineare Leiter (Drähte):

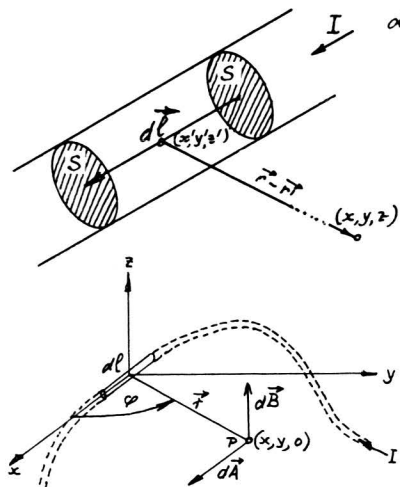


Betrachte einen homogenen Draht vom Querschnitt S , der vom Strom der Stärke I durchflossen wird. Dem Längenelement $d\vec{l}$ des Drahtes wird ein Vektor $d\vec{l}$ zugeordnet, der in die Richtung des positiven Stromes zeigt. Der Beitrag des Drahtelementes $d\vec{l}$ am Orte (x', y', z') zum Vektorpotential \vec{A} im Punkte (x, y, z) ist nach der obigen Formel gegeben durch

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot S d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Rein formal kann man sich auf den Standpunkt stellen, dass dieses Drahtelement $d\vec{l}$ einen Beitrag $d\vec{B}$ liefert zum Felde \vec{B} im Punkt P .

Zur Berechnung dieses Beitrages gehen wir zu einem neuen kartesischen Koordinatensystem über, dessen Ursprung im Leiterelement liegt, dessen x -Achse mit $d\vec{l}$ zusammenfällt und



dessen xy -Ebene den Punkt P enthält. $d\vec{A}$ zeigt dann längs x und hat den Betrag $dA_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $d\vec{B}$ ergibt sich nach der Definition des Vektorpotentials als $d\vec{B} = d(\text{rot } \vec{A}) = \text{rot}(d\vec{A})$:

$$dB_z = \frac{\partial(dA_y)}{\partial x} - \frac{\partial(dA_x)}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl r \sin\varphi}{r^3}$$

Da $d\vec{A}$ nur eine x -Komponente hat, ist $dB_x = 0$ und $dB_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0$.

In Vektorschreibweise wird damit

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

SI und

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

e.s.u.

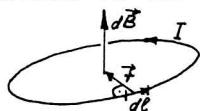
Die Darstellung von $d\vec{B}$ als Vektorprodukt zweier polarer Vektoren zeigt, dass \vec{B} ein axialer Vektor ist (Physik I, S. 104/105).

Anmerkung: Wir haben diese Formel hergeleitet ausgehend von folgenden empirischen Tatsachen:

- Es gibt keine magnetischen Ladungen, d.h. $\text{div } \vec{B} = 0$
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$, unabhängig von der Gestalt des Leiters und des ihn umschliessenden Integrationsweges.

Man hätte auch die Formel von Laplace als experimentelle Tatsache deklarieren und daraus mit der weiteren experimentellen Tatsache $\text{div } \vec{B} = 0$ die Beziehung $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$ herleiten können.

Anwendungsbeispiel für die Formel von Laplace: Berechnung der Feldstärke B im Zentrum eines Kreisstromes.

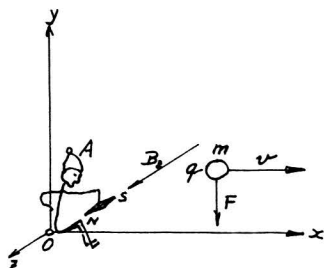


Für jedes Leitersegment $d\vec{l}$ ist $d\vec{l} \perp \vec{r}$ und der Betrag $d\vec{B}$ senkrecht zur Ebene des Kreisstromes:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r}{r^3}, \text{ also } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_{\text{Leiter Kreis}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

4. Die Lorentz-Kraft

4.1. Die Relativität elektrischer und magnetischer Felder



Zur Abwechslung rechnen wir in e.s.u.

- a) Betrachte einen Beobachter A, der im Inertialsystem $oxyz=S$ ruht und die Bewegung eines Teilchens der Masse m und der Ladung q verfolgt. Bevor das Teilchen da war, hatte er festgestellt, dass kein elektrisches Feld \vec{E} herrscht (z.B. mit Hilfe einer ruhenden Probeladung).

Er hatte auch festgestellt (z.B. mit Hilfe eines Magnetmodells), dass ein zeitlich und räumlich konstantes Feld \vec{B} herrscht, das parallel zur z -Achse gerichtet ist. In einem gegebenen Zeitpunkt t analysiert er die Bewegung und findet folgendes:

- 1) Das Teilchen hat nur eine x -Komponente der Geschwindigkeit. Sie beträgt v .
- 2) Das Teilchen erfährt eine Beschleunigung in der Richtung $-y$.

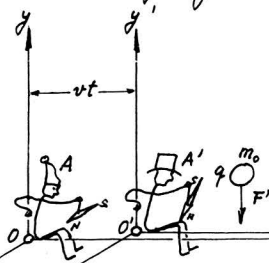
Selbstverständlich wird er diese Beschleunigung der Lorentzkraft $\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$ zuschreiben (Gravitationskräfte sollen nicht vorhanden sein): \vec{F} zeigt nach $-y$ und hat den Betrag $F = -\frac{q}{c} v B_z$. Für die y -Komponente der Bewegungsgleichung wird der Beobachter A also schreiben

$m \ddot{y} = -\frac{q}{c} v B_z$. Da sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit v relativ zum System S bewegt, ist seine Masse m nicht die Ruhemasse m_0 , sondern es ist

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{vgl. Physik I S 319}). \text{ Die Bewegungsgleichung}$$

$$\text{lautet damit } \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ddot{y} = -\frac{q}{c} v B_z \quad (1)$$

b) Nun überlegen wir uns, wie ein Beobachter A' , der in einem Inertialsystem $O'x'y'z'=S'$ ruht, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S längs x bewegt, die Situation beurteilt. Das System S' ist das "momentane Ruhesystem" des Teilchens: Im gegebenen Zeitpunkt (t für A und t' für A') verschwindet für den Beobachter A' die Geschwindigkeit des Teilchens, (was nicht heisst, dass auch die Beschleunigung verschwindet). Nach der Galilei-Invarianz



lauten die Naturgesetze für den Beobachter A' gleich wie für seinen Kollegen A , d.h. für die Lorentzkraft schreibt A'

$$\vec{F}' = \frac{q}{c} [\vec{v}' \times \vec{B}']$$

Beachte, dass q und c nicht vom Bezugssystem abhängen (SS und Physik I S. 306).

Für den Beobachter A' wird die Lorentzkraft verschwinden, da für ihn die Geschwindigkeit \vec{v}' verschwindet. (Auch A' wird ein Magnetfeld feststellen. Wie dieses Feld \vec{B}' mit dem Felde \vec{B} zusammenhängt, wollen wir vorläufig dahingestellt lassen).

Sicher gilt folgendes: Da das Teilchen für den Beobachter A eine Beschleunigungskomponente längs $-y$ hat, wird es für den Beobachter A' eine Beschleunigungskomponente längs $-y'$ haben. Als Kraft, welche diese Beschleunigung erzeugt, kommt für A' nur eine elektrische Kraft $q\vec{E}'$ in Frage. Das heisst, dass er ein elektrisches Feld \vec{E}' feststellt und folgende Gleichung aufschreibt für die y' -Komponente der Bewegung:

$$m_0 \ddot{y}' = q E_y' \quad (2)$$

Da S' das momentane Ruhesystem des Teilchens ist, darf er die Ruhemasse einsetzen.

Damit haben wir folgende wichtige Tatsache erkannt:

Die Felder \vec{B} und \vec{E} hängen vom Bezugssystem ab.

c) Wir sind jetzt in der Lage, den Zusammenhang der Feldkomponenten B_z und E_y' in unserem Beispiel zu finden: Dazu müssen wir die Bewegungsgleichungen (1) und (2) vergleichen. Die Beziehung zwischen \ddot{y} und \ddot{y}' ergibt sich aus der Lorentz-Transformation. Im momentanen Ruhesystem S' des Teilchens gilt nach Physik I S. 311 (312 *)

$$\ddot{y}' = \frac{\ddot{y}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{Durch Einsetzen in (2) erhält man}$$

$$\frac{m_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ddot{y} = q E_y' \quad , \text{ woraus durch Vergleich mit (1)}$$

$$E_y' = - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{c} B_z$$

Wir erinnern uns, dass dies für die spezielle Situation $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$ $\vec{E} = 0$ gilt.

d) Es sei nun $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ und $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$, und das gestrichelte System bewege sich mit der Geschwindigkeit v längs x . Man findet dann:

$B_x' = B_x$	$E_x' = E_x$
$B_y' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (B_y + \frac{1}{c} v E_z)$	$E_y' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (E_y - \frac{1}{c} v B_z)$
$B_z' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (B_z - \frac{1}{c} v E_y)$	$E_z' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (E_z + \frac{1}{c} v B_y)$

Zur inversen Transformation gelangt man, indem man v durch $-v$ ersetzt.

Ein anschaulicher Zusammenhang:

① Betrachte den Fall $\vec{B} = 0$, $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$. Die obige Transformation ergibt dann $E_y' = \frac{E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $E_z' = 0$, $E_x' = 0$. Wenn wir

*) In Physik I S. 312 findet man die Formel $\ddot{y}' = \ddot{y} (1 - \frac{V^2}{c^2})$, wobei V die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme ist. Dies ist nicht im Widerspruch mit der Formel, die wir hier benutzen; denn in Physik I wurde das ungestrichelte System zum momentanen Ruhesystem erklärt.

zur Veranschaulichung des \vec{E} -Feldes durch Feldlinien übergehen, und die Anzahl der Feldlinien, die senkrecht durch die Einheitsfläche hindurchtreten mit der Feldstärke identifizieren (S. 29/30), dann kann unser Resultat dahin interpretiert werden, dass sich die Dichte der Feldlinien wegen der Lorentz-Kontraktion vergrößert.

② Zum selben Schluss gelangt man bei der Betrachtung des Feldes \vec{B} . Man setzt $\vec{E}=0$ und $\vec{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$ und findet $B'_z = \frac{B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $B'_x = 0$, $B'_y = 0$.

"Die Feldlinienbilder sind der Lorentz-Kontraktion unterworfen."

In dieser Vorlesung wollen wir die relativistischen Aspekte der Elektrodynamik nicht systematisch weiter verfolgen und verweisen auf die Vorlesung "Elektrodynamik" im Zyklus der Lehrveranstaltungen über theoretische Physik. Wichtig ist für uns an dieser Stelle folgendes:

Wenn ein Beobachter, der in einem beliebigen Inertialsystem ruht, mit seinen Instrumenten ein elektrisches Feld \vec{E} misst (Kraft auf eine ruhende Probeladung) und eine magnetische Induktion \vec{B} (Drehmoment auf eine Magnetnadel), dann ist für ihn die Kraft auf eine bewegte Ladung gegeben durch

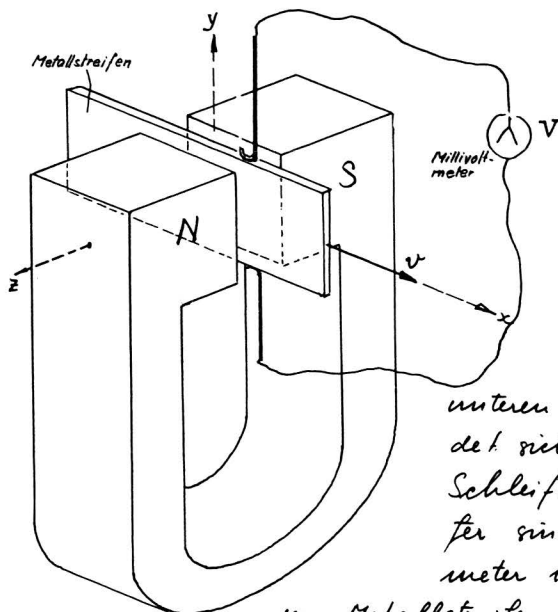
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + \frac{1}{c} q [\vec{v} \times \vec{B}] \quad \text{in e.s.u.}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q [\vec{v} \times \vec{B}] \quad \text{im SI}$$

Diese Ausdrücke gelten auch dann noch, wenn die Geschwindigkeit v vergleichbar wird mit der Lichtgeschwindigkeit.

In den folgenden Abschnitten besprechen wir Experimente, die mit dieser Kraft \vec{F} erklärt werden können.

4.2. Ein einfaches Experiment zur Relativität elektrischer und magnetischer Felder

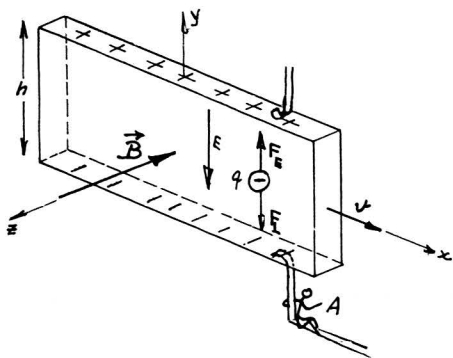


Demonstrationsexperiment.

Ein Metallstreifen wird mit der Geschwindigkeit v durch den Luftspalt eines ruhenden Hufeisenmagneten hindurchgezogen. Auf der oberen und auf der unteren Seite des Streifens befindet sich je ein ruhender Schleifkontakt. Die beiden Schleifer sind mit einem Millivoltmeter verbunden. Solange sich

der Metallstreifen bewegt, zeigt das Millivoltmeter eine Spannung an, die umso grösser ist, je schneller sich der Metallstreifen bewegt, deren Vorzeichen von der Bewegungsrichtung abhängt, und die unabhängig ist vom Metall, solange man magnetisierbare und supraleitende Metalle ausschliesst.

Interpretation ohne Benützung der Transformationsformeln von S.112



Wir betrachten die Apparatur vom Laboratoriumssystem xyz aus, in dem Magnet, Schleifkontakte und Millivoltmeter in Ruhe sind. Die Leitungselektronen werden vom bewegten Ionengitter des Metallstreifens mitgenommen. Ihre Geschwindigkeit relativ zum Bezugssystem ist also v . (Die

Leitungselektronen sind nicht frei. Sie verhalten sich, als ob eine Reibungskraft zwischen ihnen und dem Gitter der positiven Ionen

herrschen würde, wie das Phänomen des Ohm'schen Widerstandes zeigt. Die Trägheit der Leitungselektronen kann in diesem Experiment vernachlässigt werden. Man stelle sich einen sehr langen Metallstreifen vor, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt.) Für den Beobachter im Laborsystem bewegen sich die Elektronen mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse, sodass auf sie die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = \frac{1}{c} q v B$ wirkt, und zwar in der $-y$ -Richtung. Sie verschieben sich ganz wenig in dieser Richtung. Die Unterseite des Metallstreifens erhält dadurch eine negative Oberflächenladung und die Oberseite eine positive Oberflächenladung. Diese Ladungen erzeugen ein elektrisches Feld \vec{E} in der $-y$ -Richtung. Auf die Leitungselektronen wirkt daher die Kraft $\vec{F}_E = q \vec{E}$ nach oben. Da der Stromkreis nicht geschlossen ist, kann kein Strom fließen. (Man stelle sich unter dem Millivoltmeter ein Elektrometer vor). Die resultierende Kraft auf die Leitungselektronen muss also verschwinden:

$$\frac{1}{c} q v B = q E, \text{ woraus } E = \frac{1}{c} v B.$$

Wegen der Lorentz-Kraft \vec{F}_L ist das Metall in diesem Falle kein Äquipotentialgebiet mehr, obwohl kein Strom fließt.

Wenn das Feld \vec{B} homogen ist, dann ist \vec{F}_L und damit auch \vec{E} homogen. Die Spannung zwischen Ober- und Unterseite des Metallstreifens ist dann

$$\int_{\text{Oberseite}}^{\text{Unterseite}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot h, \text{ wobei } h \text{ die Höhe des Streifens bedeutet.}$$

Diese Spannung wird vom Millivoltmeter angezeigt: $V = \frac{1}{c} h v B$

Wir haben in e.s.u. gerechnet. Im SI fällt der Faktor $\frac{1}{c}$ in der Lorentz-Kraft weg, sonst bleibt sich alles gleich: $V = h v B$

Größenordnung im Demonstrationsexperiment:

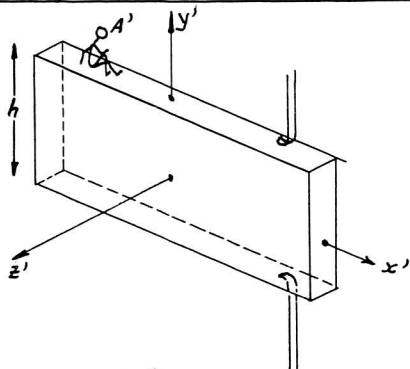
$$h = 0,1 \text{ m}, \quad v = 0,1 \text{ m sec}^{-1}, \quad B = 0,3 \text{ Tesla} \quad \rightarrow \quad V = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Volt.}$$

Materialeigenschaften gehen nicht in die Rechnung ein.

Wir wollen nun zeigen, dass die einfache Formel $V = \frac{1}{c} h v B$

nur für $\frac{v}{c} \ll 1$ gilt:

Interpretation mit Hilfe der relativistischen Transformationsformeln



mit Digitalanzeige vorstellen.) Im Laborsystem haben wir

$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix}$, $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$. Nach der Transformation S. 112 ist dann

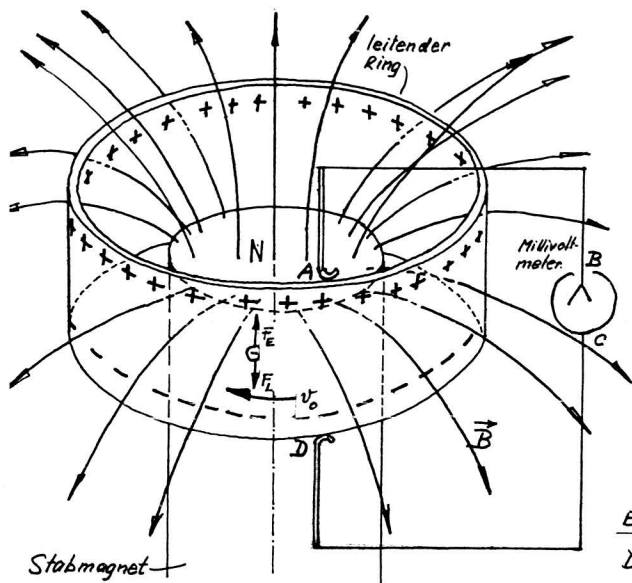
$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{c} v B$. Das elektrische Feld im Metall ist also nicht $\frac{1}{c} v B$, sondern grösser. Entsprechend ist auch die Spannung V grösser, nämlich

$$\boxed{V = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{c} h v B} \quad \text{Dies ist die korrekte Formel.}$$

Die Erklärung der Diskrepanz zur ersten Formel ist folgende: Der bewegte Leiter ist für den Beobachter im Laborsystem um den Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ verkürzt. Dies ist die Lorentz-Kontraktion (Physik I S. 312-314). Die Ladung der Oberfläche ist aber relativistisch invariant. Die Dichte der Oberflächenladung ist also grösser und damit auch die Feldstärke.

4.3. Die Unipolarmaschine

Die Unipolarmaschine ist der oben beschriebene Versuch in Ringanordnung, was eine kontinuierliche Bewegung des Metallstreifens ermöglicht. Beim Demonstrationsmodell wird die Radialkomponente des \vec{B} -Feldes eines zylindrischen Stabmagneten ausgenutzt. Die Ma-



sichine gestattet ferner, nicht nur den leitenden Ring, sondern auch den Stabmagneten um die vertikale Achse zu rotieren

Experiment No. 1:

Der Magnet ist in Ruhe, und der Ring dreht sich mit ω_0 .

Erwartung:

Dieses Experiment entspricht genau dem

auf S. 114 diskutierten. Bei einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω_0 hat der Ring die Umfangsgeschwindigkeit v_0 , und es wird eine Spannung V_0 zwischen A und B liegen, die sich nach dem auf S. 114/115 skizzierten Weg berechnen lässt.

Ausgang des Experimentes:

Das Millivoltmeter zeigt die erwartete Spannung an nach Größe und Vorzeichen. (Das Vorzeichen ändert mit dem Drehsinn)

Experiment No. 2: Magnet und Ring sind starr miteinander verbunden und drehen miteinander mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 .

Erwartung:

Da sich der Ring nicht bewegt relativ zum Magneten, wirkt keine Lorentz-Kraft auf die Leitungselektronen im Ring; d.h. zwischen den Schleifkontakten A und D liegt keine Potentialdifferenz: Das Millivoltmeter sollte null anzeigen.

Ausgang des Experimentes:

Das Millivoltmeter zeigt genau dieselbe Spannung V_0 .

wie im Experiment No. 1. Auch das Vorzeichen ist dasselbe
Experiment No. 3: Der Magnet dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 , und der Ring steht still.

Erwartung:

Wir setzen uns als Beobachter auf den Magneten. Dann rotiert für uns der Ring. Ergo muss zwischen dem oberen und dem unteren Rand des Ringes die Potentialdifferenz V_0 auftreten; d.h. das Millivoltmeter sollte V_0 anweisen.

Ausgang des Experimentes:

Das Millivoltmeter zeigt die Spannung null!

Wo liegt der Fehler in den Betrachtungen?

Den Grund für die Diskrepanz zwischen der Erwartung und dem experimentellen Ergebnis in den Fällen 2 und 3 könnte man vielleicht in den folgenden Umständen suchen:

- Die Bewegung des Leiters ist keine Translation sondern eine Rotation. Die Symmetrie des Experimentes weicht ab von derjenigen des Experimentes auf S. 114.
- Ohne gründliche Kenntnis der Relativitätstheorie, insbesondere der Transformation der Felder (vgl. S. 112) lassen sich die Experimente nicht verstehen.
- Es spielt ein Gesetz der Elektrizitätslehre hinein, das noch nicht behandelt wurde in dieser Vorlesung.
- Die Experimente können mit Hilfe der Lorentzkraft und des bisher behandelten Stoffes erklärt werden; aber wir haben bei der Aufstellung der Erwartungen etwas Wesentliches vergessen.

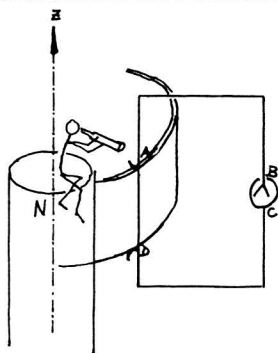
Tatsächlich trifft der Grund d) zu. Wir haben nämlich vergessen, dass sich der Leiterkreis ABCD auch

119.

im Felde des Stabmagneten befindet. Wenn sich der Magnet dreht (wie dies in den Experimenten 2 und 3 der Fall ist), dann kann man auch sagen, dass sich die Leiterschleife ABCD relativ zum Magneten bewegt, d.h. dass die Ladungsträger (Leitungselektronen) der Lorentz-Kraft unterworfen sind.

Mit anderen Worten: Wir setzen uns bei den Experimenten 2 und 3 als Beobachter auf dem Magneten. Auch von da aus können wir ja schliesslich das Millivoltmeter ablesen. Die Ablesung kann natürlich nicht davon abhängen, von wo aus das Instrument betrachtet wird. (Nun das nicht einleuchtet, der stelle sich ein Instrument mit Digitalanzeige vor.)

Betrachte zunächst das Experiment 3 auf diese Weise:

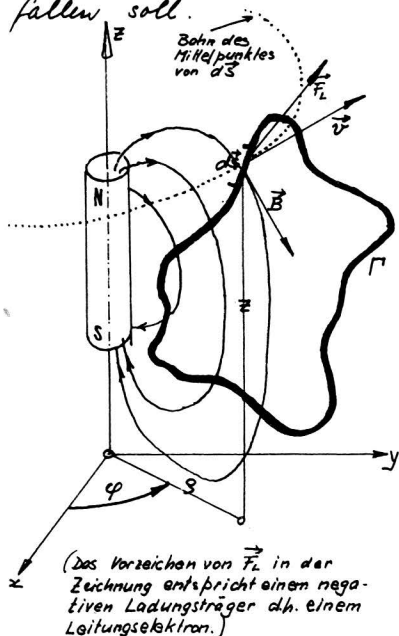


Für den Beobachter rotiert dann der geschlossene Kreis ABCDA als starrs Gebilde um die Achse z des Stabmagneten. Der Beobachter wird dann sagen, dass auf die Ladungsträger die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$ wirkt, wo \vec{v} die vom Beobachter gesehene Geschwindigkeit des Leiters ist. (Die Träg-

heitskräfte sind sehr sehr klein gegenüber der Lorentz-Kraft und spielen ohnehin keine Rolle bei unserer Betrachtung). Die Potentialdifferenz V , die das Millivoltmeter anzeigen wird, ist die Arbeit, die von der Lorentz-Kraft geleistet wird, wenn eine Einheitsladung auf dem Weg BADC von B nach C fährt. Wir sparen viele unnötige Worte, wenn wir annehmen, dass B und C beliebig nahe beieinander liegen. Die Arbeit darf dann berechnet werden für eine geschlossene Schleife. Wenn wir zeigen können, dass diese Arbeit verschwindet,

dann ist der Ausgang des Experimentes No. 3 erklärt:

Nur behandeln das Problem in Zylinderkoordinaten s, φ, z , wobei die z -Achse mit der Magnetachse zusammen fallen soll.



Die \vec{B} -Linien liegen dann alle in Meridianebenen, d.h. \vec{B} hat keine φ -Komponente. Die Geschwindigkeit \vec{v} jedes Elementes der Schleife Γ hat nur eine φ -Komponente.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_\varphi \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Schleife Γ kann eine ganz allgemeine Gestalt haben, d.h. das Schleifenelement $d\vec{S}$ kann drei Komponenten haben:

$$d\vec{S} = \begin{pmatrix} ds \\ s d\varphi \\ dz \end{pmatrix}$$

Die Komponenten der Lorentz-Kraft $\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$ sind:

$$F_s = \frac{q}{c}(v_\varphi B_z - v_z B_\varphi) = \frac{q}{c}\omega_0 s B_z$$

$$F_\varphi = \frac{q}{c}(v_z B_s - v_s B_z) = 0$$

$$F_z = \frac{q}{c}(v_s B_\varphi - v_\varphi B_s) = -\frac{q}{c}\omega_0 s B_s$$

Die Lorentz-Kraft liegt also in der Meridianebene. Die Arbeit, die ein Ladungsträger q leistet bei der Verschiebung um $d\vec{S}$, ist

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = F_s ds + F_\varphi s d\varphi + F_z dz = \frac{q}{c}\omega_0 (s B_z ds - s B_s dz)$$

Die Arbeit pro Ladung über die geschlossene Kurve Γ ist

$$\frac{1}{q} \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\omega_0}{c} \oint (s B_z ds - s B_s dz) = V$$

Nur wollen nun beweisen, dass V verschwinden muss, d.h. dass das Millivoltmeter keinen Ausschlag zeigen darf. Dazu müssen wir nur zeigen, dass der Inte-

grand ein totales Differential ist, d.h. dass

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{B}_z) = -\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{B}_s) \quad , \quad \text{ausdifferenziert} \quad \underline{s \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} + \mathcal{B}_s + s \frac{\partial \mathcal{B}_s}{\partial s} = 0}$$

Man vermutet natürlich sofort, dass das Verschwinden des unterstrichenen Ausdruckes mit einer fundamentalen physikalischen Eigenschaft des Feldes \vec{B} zusammen hängt. Eine solche Eigenschaft lautet $\text{div } \vec{B} = 0$: Es gibt keine magnetischen "Ladungen" (vgl. S. 100). In Zylinderkoordinaten ist

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(s \mathcal{B}_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial \mathcal{B}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z}$$

In unserem Fall ist $\mathcal{B}_\varphi = 0$, also

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(s \mathcal{B}_s) + \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z}$$

$\text{div } \vec{B} = 0$ heisst damit $\frac{\partial}{\partial s}(s \mathcal{B}_s) + s \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} = 0$, ausdifferenziert

$$\mathcal{B}_s + s \frac{\partial \mathcal{B}_s}{\partial s} + s \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \text{was zu zeigen war.}$$

Der Ausgang des Experimentes 2 lässt sich nun auch verstehen. Wir setzen den Beobachter auf den Magneten. Der Ring ist dann für ihn in Ruhe, und auf die Ladungsträger im Ring wirkt keine Lorentz-Kraft. Zwischen D und A liegt keine Potentialdifferenz. Die Spannung, die das Millivoltmeter zeigt, rührt allein von der Bewegung des Stückes ABCD der Schleife her. Das Integral $\int \vec{F} d\vec{s}$ über dieses Stück kann aber nicht verschwinden, da der Weg nicht geschlossen ist. Also ist die beobachtete Spannung

$$V = -\frac{1}{q} \int_{ABCD} \vec{F} d\vec{s}.$$

Es ist nun noch zu zeigen, dass sie übereinstimmen muss mit der im ersten Experiment beobachteten Spannung V_0 :

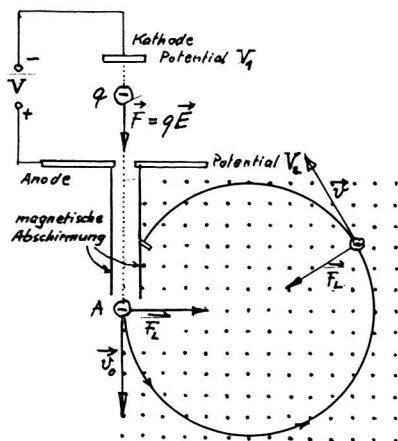
Nehmen wir den Beobachter auf den Magneten set-

zen, dann besteht der Unterschied zwischen dem Experiment 1 und dem Experiment 3 nur darin, dass bei 1 das Stück ABCD ruht, und damit nichts zum Integral $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ (S. 120) beiträgt. Das Stück DA trägt die Spannung V_0 bei, und zwar sowohl beim Experiment 1 als auch beim Experiment 3. Da beim Experiment 3 das Integral über die geschlossene Kurve Γ verschwindet, ist hier der Beitrag des Wegstücks ABCD gleich $-V_0$. Damit gilt

$$V = -\frac{1}{q} \int_{ABCD} \vec{F} \cdot d\vec{s} = V_0 \quad \text{q. e. d.}$$

(Die Überlegung des Vorzeichens erfordert einige Sorgfalt.)

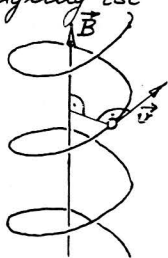
4.4. Bewegung freier Elektronen im homogenen Felde \vec{B}



In einer evakuierten Apparatur werden die aus einer Kathode austretenden Elektronen im elektrischen Felde zwischen Kathode und Anode durch die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ beschleunigt. Durch ein Loch in der Anode treten sie in einen Raum aus, in dem kein elektrisches Feld herrscht (wenn wir von der Ladung absehen die im Elektronenstrahl steckt). Beim

Punkt A treten die Elektronen mit der Geschwindigkeit \vec{v}_0 in ein homogenes Feld \vec{B} ein, das senkrecht ist zu \vec{v}_0 . (In der Skizze steht \vec{B} senkrecht auf der Zeichenebene und ist auf den Betrachter zu gerichtet.) Die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ steht in jedem Augenblick senkrecht auf der Geschwindigkeit \vec{v} des Elektrons. Die Leistung der Kraft, $\vec{F}_L \cdot \vec{v}$ (s. Physik I

S. 72), verschwindet also. Die kinetische Energie und damit der Betrag der Geschwindigkeit sind konstant $v = v_0$. Da wir ein homogenes Feld \vec{B} voraussetzen, ist auch der Betrag der Lorentz-Kraft konstant $F_L = q v_0 B$. Bei der resultierenden Bewegung wird die Beschleunigung dauernd senkrecht auf der Geschwindigkeit stehen und einen konstanten Betrag haben. Diese Bedingung ist erfüllt für eine Schraubenbewegung mit konstanter Steigung. Da die Anfangsbedingungen im Experiment so gewählt sind, dass $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, degeneriert die Schraube zu einem Kreis, dessen Ebene senkrecht auf \vec{B} steht. Der Radius r dieses Kreises heisst Zyklotronradius.



Es ergibt sich aus der Newton'schen Bewegungsgleichung:

Die Zentripetalbeschleunigung $a = \frac{v^2}{r}$ wird dem Teilchen durch die Lorentz-Kraft erteilt:

$$m \frac{v_0^2}{r} = q v_0 B, \text{ woraus } r = \frac{m v_0}{q B} = \frac{p}{q B} \quad \text{im SI}$$

$$\text{und } r = \frac{c m v_0}{q B} = \frac{c p}{q B} \quad \text{in e.s.u.}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v_0}{r}$ heisst Larmorfrequenz:

$$\omega = \frac{q B}{m} \quad \text{im SI}$$

$$\omega = \frac{q B}{m c} \quad \text{in e.s.u.}$$

Im Grenzfall der nicht-relativistischen Mechanik hängt die Larmorfrequenz nicht von der Geschwindigkeit ab. Bei

relativistischen Geschwindigkeiten ist in diesen Formeln die relativistische Masse $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ bzw. der relativistische Impuls einzusetzen (Physik I S. 315 - 319).

Aus der Messung des Zyklotron Radius erhält man bei bekannter Feldstärke B direkt das Verhältnis von Impuls zu Ladung. In der experimentellen Teilchenphysik spielt dies eine grosse Rolle, da die Bahnen geladener Teilchen sichtbar gemacht werden können mit Hilfe der Nebelkammer, der Blaskammer, der Funkkammer, sowie in photographischen Emulsionen.

Nicht-relativistische Analyse des Demonstrationsexperimentes.

Im Potentialfeld zwischen Kathode und Anode werden die Elektronen beschleunigt. Die Endgeschwindigkeit v_0 ergibt sich aus der Erhaltung der Energie (Physik I, S. 83):

$$q V_1 + \frac{1}{2} m_0 v_1^2 = q V_2 + \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

potentielle Energie bei der Kathode
kinetische Energie beim Austritt aus der Kathode
potentielle Energie bei der Anode
kinetische Energie bei der Anode

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 - \frac{1}{2} m_0 v_1^2 = q \underbrace{(V_1 - V_2)}_{\substack{\text{Spannung } V \text{ am} \\ \text{Beschleunigungsrohr.}}}, \quad m_0 = \text{Ruhemasse des Elektrons}$$

Die kinetische Energie der aus der Kathode austretenden Elektronen kann im Demonstrationsexperiment vernachlässigt werden, d.h. es ist $v_0 = \left(\frac{2qV}{m_0}\right)^{1/2}$

Experiment: $V = 30'000 \text{ Volt} = 100 \text{ statvolt}$

$$q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Cb} = 4.803 \times 10^{-10} \text{ statCb}$$

$$m_0 = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 9.109 \times 10^{-28} \text{ gr}$$

$$B = 0.00375 \text{ Tesla} = 37.5 \text{ Gauss}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 4.803 \times 10^{-10} \times 100}{9.109 \times 10^{-28}}} = 1.03 \times 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}, \quad \frac{v_0}{c} = 0.343$$

$$\lambda = \frac{c m_0 v_0}{q B} = \frac{3 \times 10^{10} \times 9.109 \times 10^{-28} \times 1.03 \times 10^{10}}{4.803 \times 10^{-10} \times 37.5} = 15.7 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{1.03 \times 10^{10}}{15.7} = 6.5 \times 10^8 \quad \left(\nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 100 \text{ MHz} \right)$$

Relativistische Analyse.

Mit $v_0/c = 0.343$ kann die nicht-relativistische Rechnung keine sehr gute Näherung sein

a) Berechnung von v_0 : In dem Energieerhaltungssatz ist anstelle von $\frac{1}{2} m_0 v^2$ die relativistische Energie $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ einzusetzen (Physik I, S. 320)

$$\underbrace{q V_1 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}}_{\substack{\text{totale Energie bei der} \\ \text{Kathode}}} = \underbrace{q V_2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}}_{\substack{\text{totale Energie bei} \\ \text{der Anode}}}$$

Die Geschwindigkeit v_1 beim Austritt aus der Kathode kann vernachlässigt werden, sodass

$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} - 1 \right) = q (V_1 - V_2)$. v_0 ist aus dieser Gleichung zu bestimmen. Man findet $v_0/c = 0.328$ (Wegen der Zunahme der Masse mit steigender Geschwindigkeit resultiert ein kleinerer Wert für v_0/c als bei der nicht-relativistischen Rechnung). $v_0 = 0.9841 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

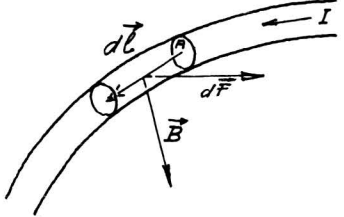
b.) Berechnung des Zyklotronradius r : Für m ist die relativistische Masse einzusetzen, sodass

$$r = \frac{m_0 c v_0}{q B \sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{9.109 \times 10^{-28} \times 3 \times 10^{10} \times 0.984 \times 10^{10}}{4.803 \times 10^{-10} \times 37.5 \times 0.9446} = 15.8 \text{ cm.}$$

4.5. Die Übertragung der Lorentz-Kraft auf das Leitermaterial

4.5.1. Die Biot-Savart-Kraft.

Felix Savart 1791-1841, Jean Baptiste Biot 1774-1862



In einem Felde \vec{B} befindet sich ein Draht vom Querschnitt A der vom Strom I durchflossen werde. Da die Leitungselektronen nicht aus dem Draht austreten, ist die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d im stationären Zustand parallel zur Drahtachse und die Lorentzkraft senkrecht dazu. In jedem Drahtelement $d\vec{l}$ (die Richtung ist durch den positiven Strom definiert) überträgt sich die Lorentz-Kraft auf das Material. Bei n Leitungselektronen pro Volumeneinheit ist die auf das Leiterstück $d\vec{l}$ übertragene Kraft, die sog. Biot-Savart-Kraft

$d\vec{F} = n A d\vec{l} q [\vec{v}_d \times \vec{B}]$. Da $\vec{v}_d \parallel d\vec{l}$, ist $d\vec{l} \vec{v}_d = v_d d\vec{l}$, sodass

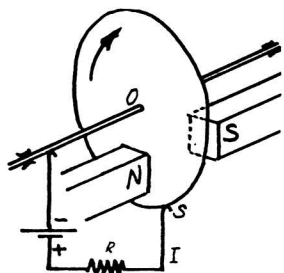
$d\vec{F} = n A v_d q [d\vec{l} \times \vec{B}]$. Mit $I = n q A v_d$ (S. 74) wird dann

$$\boxed{d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]} \quad \text{im SI, und} \quad \boxed{d\vec{F} = \frac{1}{c} I [d\vec{l} \times \vec{B}]} \quad \text{in e.s.u.}$$

4.5.2. Übertragung der Lorentz-Kraft bei zwei- und dreidimensionalen Leitern.

Demonstrationsversuche

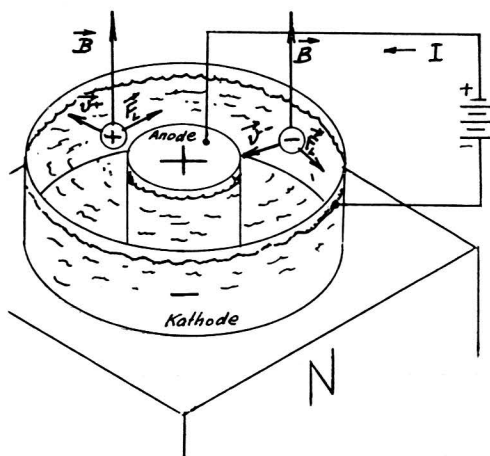
① Das Barlow'sche Rad.



Die Metallscheibe beginnt zu drehen, wenn ein Strom vom Schleifkontakt S zum Zentrum O fließt. Die Drehrichtung wechselt mit der Stromrichtung. Die Lorentz-Kraft, die auf die anfänglich radial wandernden Ladungsträger wirkt, ist tangential gerichtet und wird über die Zusammenstöße (die auch den elektrischen Widerstand verursachen) auf das Material übertragen.

Das Barlow'sche Rad läuft auch als Generator, ganz analog zur Unipolarmaschine. Wenn man es als Motor laufen lässt, ist der Drehgeschwindigkeit eine obere Grenze gesetzt, wegen der Gegenspannung, die es als Generator erzeugt. (Diese obere Grenze wird bei der skizzierten Maschine niemals erreicht, auch dann nicht, wenn die Lagerreibung verschwindet, denn die Scheibe wirkt als Wirbelstrombremse und erwärmt sich.)

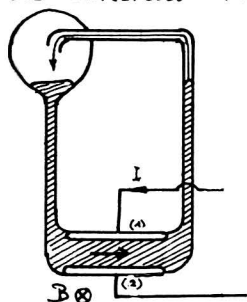
② Elektrolyt im Felde \vec{B} .



Die skizzierte Einrichtung ist ein verkaptetes Barlow'sches Rad: Der Elektrolyt beginnt zu rotieren, wenn man den Strom einschaltet.

③ Magnetohydrodynamische Pumpe

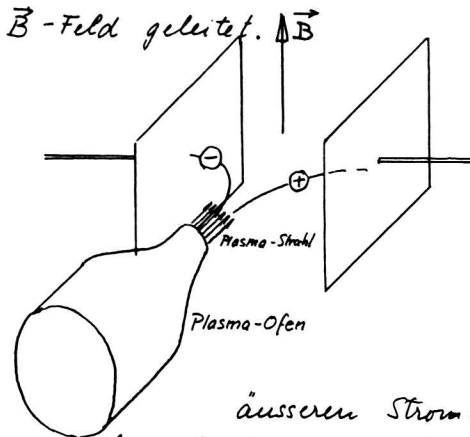
Das skizzierte Glasgefäß ist teilweise mit Quecksilber gefüllt.



Der Raum zwischen den Elektroden (1) und (2) ist in einem Felde B , welches senkrecht in die Zeichenebene hineingeht. Wenn der Strom I eingeschaltet wird, dann beginnt das Quecksilber zu zirkulieren in der angegebenen Richtung.

Eine Energiebetrachtung: Das strömende Quecksilber könnte im Prinzip eine Turbine treiben, welche mechanische Arbeit abgeben kann. Vereinfachend wollen wir einmal annehmen, dass das Quecksilber einen beliebig kleinen Widerstand habe. Dann wäre die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden (1) und (2) bei ruhendem Quecksilber beliebig klein und damit auch die Leistung des Stromes I , das Produkt aus Stromstärke und Potentialdifferenz zwischen (1) und (2). Sobald das Quecksilber aber strömt, dann entsteht nach den Überlegungen auf S. 114 eine Potentialdifferenz V , die vom Strom überwunden werden muss. Die Leistung des Stromes an der Pumpe beträgt $V I$. Sie wird im diskutierten Idealfall ganz zum Heben von Quecksilber und damit zum Antrieb der Turbine verwendet.

Die magnetohydrodynamische Pumpe funktioniert als magnetohydrodynamischer Generator, wenn man das Quecksilber z.B. durch eine mechanische Pumpe umwälzt. Zwischen den Elektroden (1) und (2) entsteht eine Potentialdifferenz, wie zwischen den Schleifkontakten der Unipolarmaschine. Im magnetohydrodynamischen Generator der Zukunft wird ein Strahl eines hochionisierten Gases samt den dazugehörigen Elektronen (ein sog. Plasma) in ein starkes, von supraleitenden Spulen erzeugtes



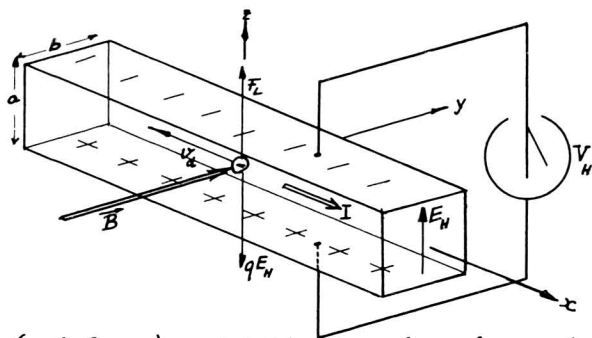
Durch die Lorentz-Kraft werden die positiven Ionen nach rechts und die Elektronen nach links abgelenkt. Zwischen den beiden Elektroden entsteht eine Potentialdifferenz. Wenn sich die Ladungsträger entladen können, dann fließt in einem

äußeren Stromkreis ein Strom. Von einer ökonomischen Realisierung ist man noch weit entfernt (November 1977).

4.5.3. Der Hall-Effekt.

James Clark-Maxwell (1831-1879) schrieb in seinem berühmten Werk "Electricity and Magnetism" über die Biot-Savart-Kraft: "A magnetic field acts not upon the current, but upon the conductor itself". Edwin Hall, ein junger Student in Baltimore, setzte sich 1880 zum Ziel, diese Aussage zu prüfen. Er sagte sich: Sollte die Kraft (trotz Maxwell) auf den Strom, d.h. auf die Ladungsträger wirken, dann würden diese im Leiter auf eine Seite gedrängt. Dies müsste sich darin äußern, dass quer zur Stromrichtung eine Potentialdifferenz auftritt (Hall wusste nichts von der Lorentz-Kraft, die 1879 von H.A. Lorentz hingeschrieben wurde). Hall führte das Experiment durch und fand den gesuchten Effekt.

Die Potentialdifferenz quer über dem Leiter, die sog. Hall-Spannung ist leicht zu berechnen: Betrachte als Beispiel einen prismatischen, metallischen Leiter vom Querschnitt $a \cdot b$, der in seiner Längsrichtung vom Strom I durchflassen wird und sich in einem homogenen Feld \vec{B} befindet, das senkrecht steht auf der Leiterachse x .



Die mit der Driftgeschwindigkeit v_d wandernden Elektronen werden durch die Lorentz-Kraft zunächst in die z -Richtung abgedrängt. Ähnlich wie beim bewegten Leiter

(vgl. S. 114) entsteht dadurch auf der oberen Seite des Leiters eine negative Oberflächenladung und auf der Unterseite eine positive Oberflächenladung. Dadurch entsteht eine z -Komponente des elektrischen Feldes, das sog. Hall-Feld E_H . Auf die Ladungsträger wirkt dann in der $-z$ -Richtung die elektrische Kraft qE_H . (Nach dem Prinzip $\text{actio} = \text{reactio}$ überträgt sich die Lorentz-Kraft via Hall-Feld auf den Leiter und wird als Biot-Savart-Kraft makroskopisch beobachtbar. Vgl. S. 125). Im stationären Zustand bewegen sich die Elektronen parallel zur Leiterachse x . Die Lorentz-Kraft und die Kraft qE_H halten sich dann die Waage: $qE_H = qv_d B$. Bei homogenem Felde B ist dann auch E_H homogen, sodass man für die Potentialdifferenz zwischen Ober- und Unterseite schreiben kann $V_H = a E_H$. Die Driftgeschwindigkeit v_d ergibt sich aus der Stromdichte $i = \frac{I}{ab} = nq v_d$ (vgl. S. 74). Damit wird die Hallspannung

$$V_H = \frac{IB}{nqb} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad V_H = \frac{1}{c} \frac{IB}{nqb} \quad \text{im e.s.u.}$$

Im Gegensatz zum Fall des bewegten Leiters (S. 114) hängt das Vorzeichen der Spannung vom Vorzeichen der beweglichen Ladungsträger ab. Ferner geht als Materialeigenschaft die Anzahl n der beweglichen Ladungsträger in der Volumeneinheit und deren Vorzeichen ein:

Mit Hilfe des Hall-Effektes kann man Konzentration und Vorzeichen der beweglichen Ladungsträger bestimmen, vorausgesetzt, dass es nur eine Sorte gibt.

Berechnung der Größenordnung der Hallspannung bei Silber (e.s.u.):
 Ag-Folie: $b = 10^{-3} \text{ cm}$, $I = 1 \text{ Amp.} = 3 \cdot 10^9 \text{ statamp.}$, $B = 10^4 \text{ Gauss}$

$B = 10^4$ Gauss. Im Ag-Metall gibt jedes Atom ein Leitungselektron ab. Die Anzahl n der Atome pro cm^3 ergibt sich aus Atomgewicht $A = 108$, Dichte $\rho = 10.5 \text{ g cm}^{-3}$ und der Avogadro'schen Zahl 6.02×10^{23} zu

$$n = \frac{10.5 \times 6.02 \times 10^{23}}{108} = 6 \times 10^{22} \text{ Atome/cm}^3 = 6 \times 10^{22} \text{ Leitungsel./cm}^3$$

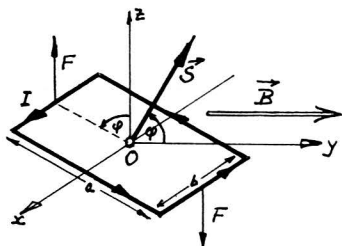
$$V_H = \frac{3 \times 10^9 \times 10^4}{3 \times 10^{10} \times 6 \times 10^{22} \times 4.8 \times 10^{-10} \times 10^{-3}} = 3.5 \times 10^{-8} \text{ statvolt} = 1.05 \times 10^{-5} \text{ Volt.}$$

Der experimentelle Wert ist etwa 20% kleiner. Diese Übereinstimmung ist erstaunlich gut angesichts der Bemerkungen über die metallische Leitfähigkeit von S.84/85. Trotzdem ist die Natur nicht so einfach: Es gibt Metalle (z.B. Be, In, Zn, Cd), bei denen das Vorzeichen der Hallspannung umgekehrt ist, obwohl es sicher nicht die positiven Ionen sind, die die Ladung transportieren. Diese Fälle stellen kein Rätsel mehr dar für die Festkörperphysik.

5. Die Magnetisierung der Materie

Ein permanenter Stabmagnet (z.B. ein magnetisierter Stahlstab) hat ein äusseres \vec{B} -Feld, das demjenigen einer stromdurchflossenen, schlanken, dicht bewickelten Spule sehr ähnlich sieht. Wir können dies nur verstehen, wenn wir uns ein Bild machen von der magnetisierten Materie. Wir kommen nicht darum herum, die Molekularströme explizite einzuführen.

5.1. Der Begriff des magnetischen Momentes



Wir beginnen mit einer makroskopischen Betrachtung: Im skizzierten starren, rechteckigen Rahmen zirkuliere ein Strom I . Von einer äusseren Einrichtung wird ein homogenes Feld \vec{B}

erzeugt, das parallel zur y-Achse gerichtet ist. Die resultierende Dynamik der Biot-Savart Kräfte auf die Seiten des Rahmens ist ein Drehmoment \vec{M}_{mech} , das längs $-x$ zeigt. Die Dynamik ist unabhängig vom Bezugspunkt, da die resultierende Kraft auf den Rahmen verschwindet (Physik I, S. 125/126). Der Betrag des Drehmomentes ist $M_{\text{mech}} = Fa \sin \varphi$, wobei $F = IbB$ (S. 125), sodass

$$M_{\text{mech}} = IabB \sin \varphi$$

Wir führen den Flächenvektor \vec{S} des Rahmens ein und legen dessen positive Richtung so fest, dass er mit der Zirkulation des positiven Stromes eine Rechtsschraube bildet. Das Drehmoment lässt sich dann als Vektorprodukt schreiben:

$$\vec{M}_{\text{mech}} = I [\vec{S} \times \vec{B}] \text{ im SI und } \vec{M}_{\text{mech}} = \frac{1}{c} I [\vec{S} \times \vec{B}] \text{ in e.s.u.}$$

Als magnetisches Moment des Rahmenstromes definiert man den Vektor

$$\boxed{\vec{\mu} = I \vec{S}} \text{ im SI und } \boxed{\vec{\mu} = \frac{1}{c} I \vec{S}} \text{ in e.s.u.}$$

$\vec{\mu}$ ist ein achsialer Vektor. In beiden Masssystemen ist

$$\boxed{\vec{M}_{\text{mech}} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

Eine analoge Beziehung gilt nach S. 52 für den elektrischen Dipol:

$\vec{M}_{\text{mech}} = \vec{p} \times \vec{E}$. Die Faktoren im Vektorprodukt sind aber hier polare Vektoren.

Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ hat die Tendenz, parallel zum Felde \vec{B} zu sein. Seine potentielle Energie bezogen auf die Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\boxed{W_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}, \text{ wieder analog zum elektrischen Dipol.}$$

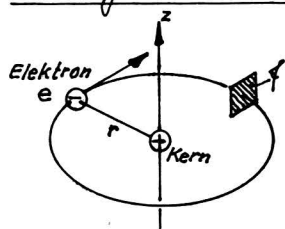
Nach diesen Beziehungen wird $\vec{\mu}$ gemessen in $\frac{\text{Joule}}{\text{Tesla}}$ im SI und in $\frac{\text{erg}}{\text{Gauss}}$ in e.s.u.

Für eine beliebige Stromschleife gelten dieselben Formeln. In der Definition von $\vec{\mu}$ ist $\vec{S} = \iint d\vec{f}$, wobei über eine beliebige von der Stromschleife berandete Fläche zu integrieren ist. Das Integral hängt bekanntlich nur von der Randkurve ab.

5.2. Magnetische Momente von Atomen und anderen Teilchen

Wir nehmen in e.s.u., um den Anschluss an die klassischen Bücher über Atomphysik etwas zu erleichtern.

Das magnetische Moment eines einfachen Atommodells



Wir betrachten das Elektron als Massenpunkt mit der Ladung e und der Masse m_0 , der den festgehaltenen Atomkern auf einer Bahn vom Radius r mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω umkreist. Bei jedem Umlauf passiert

das Elektron einmal die Kontrollfläche ϕ , pro sec also $\frac{\omega}{2\pi}$ mal. An jeder Stelle der Kreisbahn fließt ein mittlerer Strom der Stärke $I = \frac{e\omega}{2\pi}$. Wenn wir uns das Elektron homogen über die Kreislinie verschmiert denken, fließt ein konstanter Strom der Stärke I . Das magnetische Moment dieses Stromes steht senkrecht auf der Bahnebene und hat den Betrag $\mu_z = \frac{1}{c} I \pi r^2 = \frac{1}{c} \frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2c} e\omega r^2$. Der Bahndrehimpuls \vec{L} steht ebenfalls senkrecht auf der Bahnebene. Sein Betrag ist $L_z = m_0 \omega r^2$. Damit können wir schreiben

$$\mu_z = \frac{e}{2m_0 c} L_z \quad (e = -4,803 \cdot 10^{-10} \text{ statcoulb}, m_0 = 0,91095 \cdot 10^{-27} \text{ g})$$

Die strenge quantenmechanische Behandlung würde auf dasselbe Ergebnis führen. L_z kann aber nach der Quantenmechanik nur diskrete Werte annehmen: $L_z = m \hbar$, wobei m eine "Quantenzahl" ist, die nur die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ annehmen kann, und \hbar eine universelle Naturkonstante, das Planck'sche Wirkungsquantum h dividiert durch 2π ($h = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec}$). Damit ist


$$\mu_z = \frac{e \hbar}{2m_0 c} \cdot m$$

Die z-Komponente des magnetischen Momentes eines umlaufenden Elektrons ist ein ganzzahliges Vielfaches des sog. Bohr'schen Magnetons

$$\mu_{\text{Bohr}} = \frac{e \hbar}{2m_0 c} = -0,927 \cdot 10^{-20} \frac{\text{erg}}{\text{Gauss}}$$

Da die Ladung des Elektrons negativ ist, sind μ_z und L_z entgegengesetzt gerichtet.

Das Spinnmoment des Elektrons


 Das Elektron ist nicht einfach ein (negativ) geladener Massenpunkt. Es verhält sich, als ob es einen Drehimpuls um eine eigene Achse hätte, dessen Komponente längs einem äusseren Felde \vec{B} nur die beiden Werte $+\frac{1}{2}\hbar$ und $-\frac{1}{2}\hbar$ annehmen kann. Dieser Drehimpuls wird Spin genannt. Mit dem Spin ist ein magnetisches Moment gekoppelt, als ob das Elektron ein negativ geladenes, rotierendes Kügelchen wäre. Die Komponente dieses magnetischen Moments längs der Richtung von \vec{B} wird als z-Komponente betrachtet. Sie kann nur zwei diskrete Werte annehmen, nämlich $\mu_z = \pm 1,00116 \mu_{\text{Bohr}}$. Entsprechend der negativen Ladung sind Spin und magnetisches Moment beim Elektron entgegengesetzt gerichtet. Eine drastische Manifestation des magnetischen Spinnmoments der Elektronen ist z.B. die Magnetisierung von Eisen.

Spinnmomente anderer Teilchen

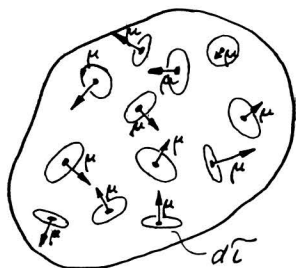
Manche Elementarteilchen haben einen Spin und ein damit gekoppeltes magnetisches Moment. Als Beispiele betrachten wir zwei Teilchen, die rund 2000 mal schwerer sind als das Elektron, nämlich das Proton und das Neutron. Wie beim Elektron kann bei beiden Teilchen die z-Komponente des Spins nur die beiden Werte $+\frac{1}{2}\hbar$ und $-\frac{1}{2}\hbar$ annehmen. Beim Proton sind die entsprechenden Komponenten des magnetischen Moments $\mu_z = \pm 2,7928 \frac{q\hbar}{2Mc}$, wobei q die Ladung des Protons ($q = +4,803 \cdot 10^{-10}$ statelb) und M die Masse des Protons ($M = 1,6726 \cdot 10^{-24}$ g) bedeuten. Beim Neutron sind die entsprechenden Komponenten des magnetischen Moments $\mu_z = \mp 1,9130 \frac{q\hbar}{2Mc}$, wobei für q und M die obigen Zahlen einzusetzen sind. Erstaunlich ist, dass auch ein neutrales Teilchen ein magnetisches Moment haben kann. Die Vorstellung von einem rotierenden Kügelchen ist offensichtlich viel zu naiv!

Die Grösse $\frac{q\hbar}{2Mc} = 0,5050 \cdot 10^{-23} \frac{\text{erg}}{\text{Gauss}}$ wird Kernmagneton genannt.

Viele Atomkerne haben einen Spin und ein damit gekoppeltes magnetisches Moment. Im allgemeinen kann die z-Komponente mehr als zwei diskrete Werte annehmen. Das magnetische Moment ist von der Grös-

senordnung des Kernmagnetons.

5.3. Die Definition der Magnetisierung



$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}_i}{dV}$$

Betrachte ein Volumenelement dV , das eine grosse Zahl von atomaren magnetischen Momenten $\vec{\mu}_i$ enthält. Das magnetische Moment des ganzen Volumenelementes ist definiert als $\sum_i \vec{\mu}_i$. Der Vektor der Magnetisierung ist definiert als magnetisches Moment pro Volumen:

Die Magnetisierung \vec{M} ist eine phänomenologische Grösse, ähnlich wie die dielektrische Polarisation \vec{P} .

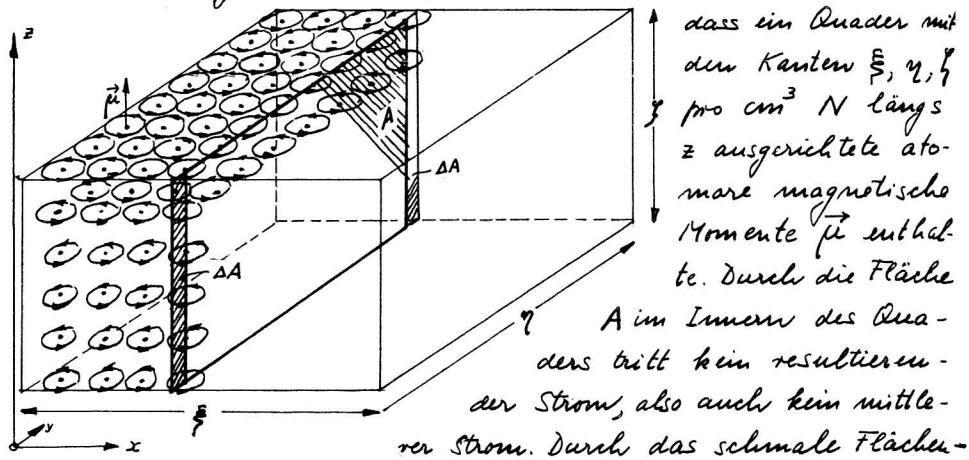
Beachte aber, dass \vec{M} (als Summe von axialen Vektoren) ein axialer Vektor ist, während \vec{P} ein polarer Vektor ist.

5.4. Phänomenologische Betrachtung der Magnetisierung und der Molekularströme

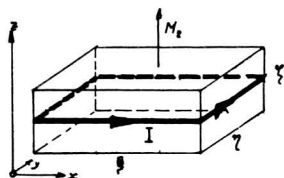
Die Magnetisierung \vec{M} eines Materiestücks ist makroskopisch beobachtbar. Die "atomaren" Ströme (seien es "Bahnlaufströme" wie im einfachen Atommodell, oder "Spinströme") erzeugen ein Feld \vec{B} , das sich auch ausserhalb der magnetisierten Materie bemerkbar macht. Es wirkt auch auf ein magnetisiertes Volumenelement in einem aussen produzierten Felde \vec{B} ein Drehmoment $d\vec{M}_{\text{mch}} = \vec{M} dV \times \vec{B}$.

Wir behandeln nun das Problem vom rein phänomenologischen Standpunkt aus. Wir interessieren uns nicht für den Verlauf der Ströme und des Feldes \vec{B} in und zwischen den Atomen.

Wir können dann einem Volumenelement (das immer noch sehr viele Atome enthalten soll) einen Ersatzstrom zuschreiben, der nach aussen dieselbe magnetische Wirkung hat wie die Gesamtheit der atomaren Ströme. Dieser Ersatzstrom ist in einer makroskopischen Theorie der Molekularströmung. Anhand eines (makroskopisch betrachtet) homogen magnetisierten Quaders lässt sich der Ersatzstrom leicht überlegen. Der Einfachheit halber nehmen wir an,



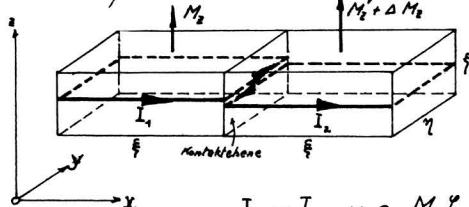
stück ΔA unter der Oberfläche fliesst aber ein Strom parallel zur Kante ξ . Vom mikroskopischen (atomaren) Standpunkt aus betrachtet fliesst dieser Strom in einer Oberflächenschicht, deren Dicke etwa ein Atomradius beträgt. Makroskopisch gesehen ist es einfach ein Oberflächenstrom. Da im Innern des Materials makroskopisch betrachtet kein Strom fliesst, ist der Oberflächenstrom als Ersatzstrom anzusehen: Er muss so gewählt werden, dass er dasselbe magnetische Moment und dasselbe makroskopische \vec{B} -Feld erzeugt wie die atomaren Kreisströme zusammen: Innerhalb des Quaders entspricht das \vec{B} -Feld des Oberflächenstromes dem räumlich gemittelten \vec{B} -Feld der atomaren Kreisströme. Ausserhalb des Quaders, für Abstände von der Oberfläche, die gross sind im Vergleich zum Atomradius, ist das \vec{B} -Feld des Oberflächenstromes gleich der Superposition der \vec{B} -Felder aller atomaren Kreisströme im Quader.



Die Stärke I des Gürtelstromes ergibt sich aus der Bedingung, dass er dasselbe magnetische Moment erzeugen muss wie die atomaren Kreisströme zusammen:

$$N \xi \eta \zeta \mu_z = \xi \eta \zeta M_z = \frac{I}{c} \xi \eta, \text{ also } I = c M_z \zeta \quad (\text{e.s.u.})$$

Eine makroskopisch inhomogene Magnetisierung lässt sich nun behandeln, indem man einen Körper aufbaut aus kleinen, homogen magnetisierten Quadern $\xi \eta \zeta$, wobei die Magnetisierung von Quader zu Quader aber ändert. Die Magnetisierung jedes Quaders werde durch die oben berechneten Oberflächenströme dargestellt. Fügt man zwei Quader mit verschiedener Magnetisierung zusammen, dann fließt ein Oberflächenstrom in der Kontaktebene:

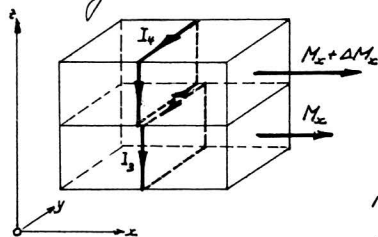


$$I_1 - I_2 = c M_z \zeta - c (M_z + \Delta M_z) \zeta = -c \Delta M_z \zeta$$

Mit $\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} \xi$ wird dann $I_1 - I_2 = -c \frac{\partial M_z}{\partial x} \xi \zeta$. Die mittlere Stromdichte in der y -Richtung beträgt

$$i_y = \frac{I_1 - I_2}{\xi \zeta} = -c \frac{\partial M_z}{\partial x}$$

Ein weiterer Beitrag zu i_y tritt auf, wenn die Magnetisierung noch eine x -Komponente hat, die von z abhängt:



Ganz analog wie oben findet man

$$i_y = \frac{I_4 - I_3}{\xi \zeta} = +c \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

Eine eventuelle y -Komponente der Magnetisierung verlangt keinen Strom längs y . Damit ist die resultierende Strom-

dichte längs y

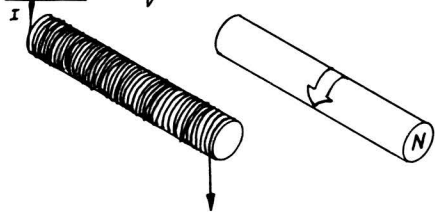
$$i_y = c \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right), \text{ und analog } i_z = c \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \text{ und } i_x = c \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right), \text{ also}$$

$$\vec{i}_{\text{mol}} = c \operatorname{rot} \vec{M}$$

in e.s.u. und

$$\vec{i}_{\text{mol}} = \operatorname{rot} \vec{M} \quad \text{im SI}$$

Bei homogener Magnetisierung verschwindet die Molekularstromdichte im Inneren des Materials, und es bleiben nur die Oberflächenströme (vgl. Skizze S. 135). Ein längs seiner Achse homogener magnetisierter Zylinder hat deshalb dasselbe \vec{B} -Feld wie eine dicht bewickelte, stromdurchflossene, leere Spule.



Im e.s.u.-System ist die Dimension der Magnetisierung dieselbe wie für das Feld \vec{B} . Entsprechend wird sie in Gauss angegeben. Im SI wird \vec{M} in Ampère/Meter gemessen.

5.5. Das Feld \vec{H} als phänomenologische Rechengröße

Das Feld \vec{H} ist (ähnlich wie das Feld \vec{D}) eine Rechengröße, die bei phänomenologischen Betrachtungen nützlich sein kann.

Definition

e.s.u.

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$$

Bei Abwesenheit magnetisierbarer Materie ist $\vec{M} = 0$, also $\vec{H} = \vec{B}$. Trotzdem wird aus historischen Gründen die Masseneinheit von \vec{H} nicht Gauss genannt, sondern Oersted. (Hans Christian Oersted, 1777-1851, entdeckte 1820 bei einer Vorlesungsdemonstration die magnetischen Wirkungen elektrischer Ströme). Die Dimensionen von \vec{H} , \vec{B} und \vec{M} sind gleich. (vgl. S. 97, 98, 131).

SI

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

H und B haben im SI nicht dieselbe Dimension, da μ_0 nicht dimensionslos ist (S. 12). Bei Abwesenheit magnetisierbarer Materie ist $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$. Die Dimension von \vec{H} ist gleich der Dimension von \vec{M} , nämlich Ampère/Meter.

Umrechnung:

$$1 \frac{\text{Ampère}}{\text{Meter}} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Oersted}$$

Die Rotation des Feldes \vec{H} im stationären Zustand

e.s.u.	SI
$\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{B} - 4\pi \text{rot } \vec{M}$	$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \text{rot } \vec{M}$
Diese Gleichung gilt auch noch für nichtstationäre Vorgänge; denn sie geht rein mathematisch aus der Definition von \vec{H} hervor.	
Im <u>stationären</u> Zustand gilt nach S. 106	
$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{leit}} + \vec{i}_{\text{mol}})$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{i}_{\text{leit}} + \vec{i}_{\text{mol}})$
damit wird nach S. 136	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}_{\text{leit}}$</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\text{rot } \vec{H} = \vec{i}_{\text{leit}}$</div>

Aus dieser Gleichung darf man ja nicht schliessen, dass das Feld \vec{H} nur von den Leitungsströmen herrühre. Die Gleichung sagt nur aus, dass im stationären Zustand zu rot \vec{H} nur Leitungsströme beitragen. Molekularströme können sehr wohl im Feld \vec{H} erzeugen; aber zu rot \vec{H} tragen sie nichts bei. Anders steht es mit dem Feld \vec{B} : Im stationären Zustand tragen zu rot \vec{B} sowohl die Leitungsströme als auch die Molekularströme bei. In diesem Sinne ist \vec{B} das physikalisch bedeutsamere Feld als \vec{H} .

Analog könnte man in der Elektrostatik (die sich auch nur mit stationären Zuständen befasst) das Feld \vec{E} gegenüber dem Feld \vec{D} als das bedeutungsvollere bezeichnen: Zu div \vec{E} tragen alle Ladungen bei, zu div \vec{D} hingegen nur die sog. "wahren" Ladungen (S. 59).

Anmerkung für künftige Physiklehrer: Im SI hat die Masseinheit der Feldstärke \vec{H} , nämlich Ampère/Meter (S. 137), eine anschauliche Bedeutung. Im Innern einer langen, schlanken Spule der Länge l und mit N Windungen herrscht im Vakuum nach S. 104 die Feldstärke $H = \frac{1}{\mu_0} B = \frac{NI}{l}$. Dies ist die Zahl der Ampèrewindungen pro Meter Spulenlänge. Aus didaktischen Gründen ist man deshalb versucht, zuerst das Feld \vec{H} einzuführen. Der Schritt zum Verständnis des Feldes \vec{B}

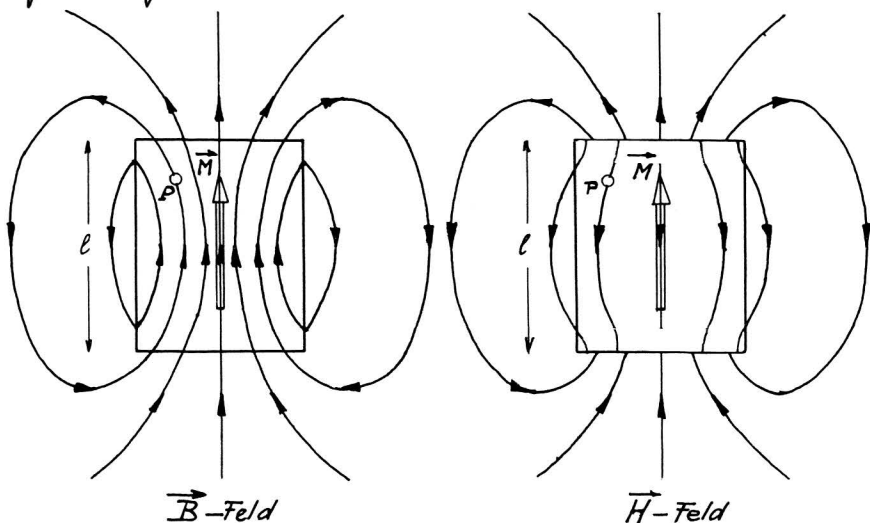
wird dadurch nicht allzusehr erschwert; denn die Magnetisierung \vec{M} wird auch in Ampère/Meter ausgedrückt und kann auf gleiche Weise veranschaulicht werden. (Skizze S. 137).

5.6. Das Beispiel des permanenten Magneten

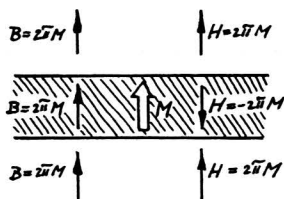
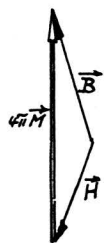
Ein permanenter Magnet hat ein \vec{B} -Feld und damit auch ein \vec{H} -Feld, ohne dass irgendwo Leitungsströme fließen. Nach S. 138 ist dann $\text{rot } \vec{H} = 0$ an jeder Stelle in- und ausserhalb des Magneten. Nach dem Satz von Stokes aus der Vektoranalysis ist dann auch $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$ für jede geschlossene Kurve. (Sie darf zum Teil innerhalb und zum Teil ausserhalb des Magneten verlaufen.) \vec{H} könnte als Gradient einer Potentialfunktion dargestellt werden. Zur Illustration betrachten wir das Feld \vec{H} und das Feld \vec{B} eines homogen, permanent magnetisierten Kreiszylinders *). Im einer phänomenologischen Betrachtung kann das Feld \vec{B} nach S. 135-137 dem Felde eines Oberflächenstroms gleichgesetzt werden, der um den Zylinder herumfließt und gleichmässig über die Zylinderlänge verteilt ist. Die Stärke dieses Ersatzstroms ist $I = cMl$, wobei l die Länge des

*) Eine homogene Magnetisierung ist nur annähernd realisierbar

Zylinders bedeutet. Wir rechnen hier in e.s.u., um die zeichnerische Illustration zu erleichtern: Wegen der Definition $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$, sind \vec{H} und \vec{B} ausserhalb des Zylinders gleich, da hier $\vec{M} = 0$.



Die \vec{B} -Linien sind geschlossene Kurven, von denen jede ihren Umlaufsinn hat. Das Feld \vec{H} ergibt sich aus \vec{B} gemäss der Definition $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$. Ausserhalb des Zylinders, im Vakuum, ist $\vec{H} = \vec{B}$. Innerhalb des Zylinders ist von \vec{B} an jedem Punkte derselbe Vektor $4\pi\vec{M}$ zu subtrahieren. Die nebenstehende Skizze entspricht der Vektorsubtraktion für den Punkt P in den obigen Feldlinienbildern. Das Feld \vec{H} ist nicht quellenfrei. Es entspringt der Nordpolfläche des magnetisierten Zylinders und endet auf der Südpolfläche. Man könnte an dieser Stelle vermuten, dass dieses Feld \vec{H} aussieht wie das Feld \vec{E} , das erzeugt würde von zwei entgegengesetzt gleichen, homogenen, kreisförmigen Flächenladungen im Abstand l . Diese Vermutung ist falsch.



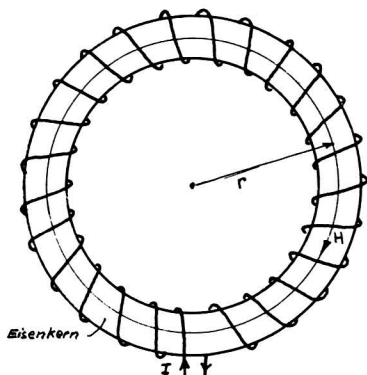
Als Denkanstoss sei das Feld einer seitlich unendlich ausgedehnten Platte gegeben, die permanent, homogen, senkrecht zu ihrer Ebene magnetisiert ist. (vgl. S. 67).

5.7. Die Charakterisierung magnetischer Materialien

Nur befassen uns in diesem Abschnitt mit der phänomenologischen Charakterisierung der magnetischen Eigenschaften von Materialien. Einer ähnlichen Aufgabe sind wir bei der Beschreibung der dielektrischen Eigenschaften eines Materials gegenübergestellt (S. 55-59). Wir benutzten damals die Funktion $\vec{P}(\vec{E})$ zur Charakterisierung des Materials. Vom experimentellen Standpunkt aus ist dies zweckmässig, da man z.B. bei einem Plattenkondensator durch Anlegen einer bekannten Spannung ein kontrollierbares \vec{E} -Feld hat, das unabhängig ist vom eingefüllten Dielektrikum, solange dieses homogen ist und den ganzen Raum zwischen den Platten erfüllt. Wir beschränkten uns dann auf die lineare Beziehung $\vec{P}(\vec{E}) = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ (im SI) und fanden, dass sie äquivalent ist mit $\vec{D}(\vec{E}) = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, wobei $\epsilon = 1 + \chi$. Zur experimentellen Bestimmung von ϵ genügt eine Kapazitätsmessung.

Man könnte bei der Beschreibung der magnetischen Eigenschaften ganz analog vorgehen und die Funktion $\vec{M}(\vec{B})$ zur Charakterisierung des Materials verwenden. Dies ist nicht üblich, denn diese Beziehung steht nicht im direkten Zusammenhang mit einer Messanordnung. Man pflegt die magnetischen Eigenschaften durch die Funktion $\vec{B}(\vec{H})$ zu beschreiben. Die Magnetisierung steckt in der Definition von \vec{H} (S. 137).

5.7.1. Ferromagnetische Materialien

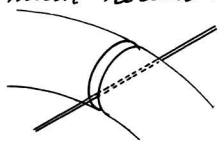


Betrachte als Beispiel einen homogenen, schlanken Ring aus (isotropem) Eisen, der dicht unwickelt ist mit einem isolierten Kupferdraht, der vom Strom I durchflossen wird.

Frage: Wie hängt das Feld \vec{B} im Eisenring vom Strom I ab?

Diese Frage ist nur sinnvoll, wenn

es einen Weg gibt zur Messung von \vec{B} im Eisen. Tatsächlich gibt es einen einfachen, direkten Weg. Um ihn zu verstehen, muss man aber das Induktionsgesetz von Faraday kennen. Da wir dieses noch nicht behandelt haben, sind wir in eine didaktische Sackgasse geraten und müssen uns provisorisch mit einem Gedankenexperiment retten: Wir denken uns einen unendlich schmalen Spalt im Ring, legen einen stromdurchflossenen Draht hindurch, messen die Biot-Savart Kraft (vgl. S. 125) und berechnen daraus \vec{B} .



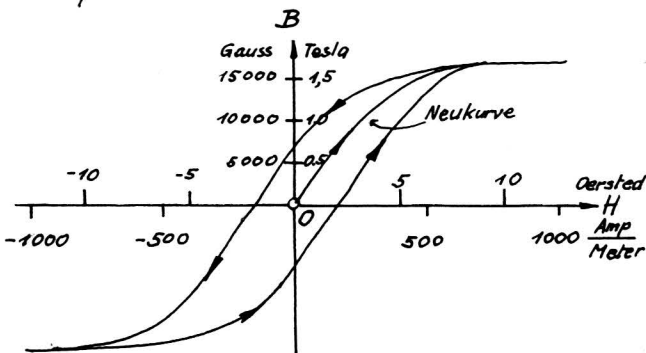
Aus der Abhängigkeit von \vec{B} vom Spulenstrom I ergibt sich die gesuchte Materialfunktion $\vec{B}(\vec{H})$ auf einfache Weise, da wegen der Ringgeometrie das Feld \vec{H} aus dem Strom berechnet werden kann, vorausgesetzt, dass der Spalt so schmal ist, dass er das System nicht beeinflusst. Wir betrachten einen stationären Strom I , sodass nach S. 138 $\text{rot } \vec{H} = \vec{i}_{\text{Leit}}$. Durch Integration dieser Gleichung über die Fläche des Kreises vom Radius r in der Skizze auf S. 141 erhält man:

$$\iint \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{f} = \iint \vec{i} \cdot d\vec{f} = NI, \text{ wobei } N = \text{Windungszahl.}$$

Mit dem Satz von Stokes wird dann

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = NI$. Wegen der Ringsymmetrie verläuft \vec{B} tangential zum Integrationskreis und ändert den Betrag nicht, sodass in guter Näherung

$2\pi r H = NI$, also $H = \frac{NI}{2\pi r}$, unabhängig von den Eigenschaften des Materials. Für Eisen erhält man experimentell Kurven der nebenstehend



skizzierten Art. Die Funktion $B(H)$ ist nicht eindeutig, indem B nicht nur von H , sondern auch von der magnetischen Vorgeschichte

abhängt. Dieses Phänomen wird "magnetische Hysteresis" genannt (Hinken auf griechisch: hysteresis). Es lässt sich damit erklären, dass ferromagnetische Materialien aus Gebieten bestehen, in denen die atomaren magnetischen Momente parallel sind (Weiss'sche Bezirke). Wenn ein äusseres Magnetfeld angelegt wird, wachsen die Bezirke, deren Magnetisierung eine grössere Komponente in Richtung des angelegten Feldes hat, auf Kosten der anderen Bezirke: Die potentielle Energie nimmt ab (S. 131). Mit polarisiertem Licht können die Weiss'schen Bezirke sichtbar gemacht werden (Demonstrationsexperimente).

Ohne Eisenkern wäre das \vec{B} -Feld in der Ringspule einige tausend mal schwächer: Man sieht dies sofort ein, wenn man die Funktion $B(H)$ im e.s.u.-Massstab betrachtet. Bei Abwesenheit des Eisenkerns wäre $B = H$ (S. 137).

5.7.2. Nicht-ferromagnetische Materialien

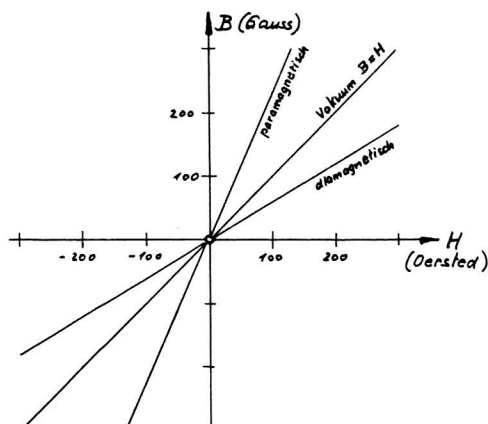
Wenn die Ringspule mit einem nicht-ferromagnetischen Material gefüllt wird, beobachtet man nicht die grosse "Verstärkung" des Feldes \vec{B} . Die Beziehung zwischen \vec{B} und \vec{H} im Ring ist im allgemeinen bei nicht zu tiefen Temperaturen und nicht zu hohen Feldstärken linear, sodass man schreibt:

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \quad \text{e.s.u.} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}} \quad \text{im SI}$$

μ ist eine dimensionslose und bei isotropen Materialien eine skalare Grösse, die für das Material charakteristisch ist^{*)}. Sie wird magnetische Permeabilität genannt. (Permeabilität heisst Durchdringbarkeit. Gemeint ist die Durchdringbarkeit des Materials für das Feld \vec{B}). Gemäss der obigen Definition hängt die Permeabilität nicht vom Masssystem ab. Die Permeabilität vom Vakuum ist $\mu = 1$. Eine Substanz nennt man:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{paramagnetisch, wenn } \mu > 1 \\ \text{diamagnetisch, wenn } \mu < 1 \end{array}}$$

^{*)} Unglücklicherweise wird auch der Betrag eines magnetischen Moments mit μ bezeichnet. Die Gefahr einer Verwechslung ist allerdings gering.



Die Permeabilität μ kann bei statischen Verhältnissen nur positive Werte haben. Es gibt aber Materialien, für welche sie genau null ist: Supraleiter erster Art bei nicht zu hohen Feldstärken H .

Paramagnetisches Verhalten eines Materials lässt sich erklären mit der Annahme von ausrichtbaren, permanenter, atomaren magnetischen

Momenten. Diese können sowohl von den Elektronenbahnen um den Kern herrühren (S. 132), als auch von den magnetischen Momenten, die mit Spins gekoppelt sind (S. 133): Das mechanische Drehmoment, das ein von aussen angelegtes magnetisches Feld auf einen permanenten magnetischen Dipol ausübt, hat die Tendenz, den Dipol parallel zum Felde auszurichten. Die Molekularströme zirkulieren dann im selben Sinne wie der Leitungsstrom und verstärken dessen Feld (S. 131). Da die Wärmebewegung der Ausrichtung der permanenten atomaren magnetischen Momente entgegenwirkt, nimmt die Permeabilität paramagnetischer Substanzen mit steigender Temperatur ab.

Das diamagnetische Verhalten können wir an dieser Stelle nur sehr oberflächlich erklären: Es hat den Anschein, als ob das äussere Magnetfeld magnetische Dipole "induziert", die ihm entgegengesetzt gerichtet sind.

Experimentell lassen sich paramagnetische von diamagnetischen Materialien leicht unterscheiden: In einem inhomogenen Magnetfeld werden die ersteren nach den Orten hoher Feldstärke und die letzteren nach den Orten kleiner Feldstärke hingezogen. Diese Beobachtung ist im folgenden Sinne im Einklang mit den obigen Erklärungen: In einem paramagnetischen Körper entsteht eine Magnetisierung, die parallel ist zum äusseren Feld, und die einem makroskopischen magnetischen Dipol entspricht, den wir mit $\vec{\mu}$ bezeichnen. Seine potentielle Energie ist nach S. 131 $W_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Sie liegt also umso tiefer, je grösser die Feldstärke B ist. In einem diamagnetischen Körper entsteht hingegen eine

dem äusseren Felde entgegengerichtete Magnetisierung. Die potentielle Energie des makroskopischen magnetischen Dipols ist deshalb an Orten kleiner Feldstärke kleiner als an Orten grosser Feldstärke.

Die magnetische Suszeptibilität χ : In der Theorie der magnetischen Materialien werden die magnetischen Eigenschaften oft durch die Abhängigkeit der Magnetisierung \vec{M} von der Feldstärke \vec{H} beschrieben. Man definiert eine magnetische Suszeptibilität χ durch die Beziehung

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad \text{in e.s.u. und im SI}$$

Da \vec{M} und \vec{H} dieselbe Dimension haben (S.137), ist χ dimensionslos. Dies heisst aber nicht, dass χ unabhängig ist vom Masssystem:

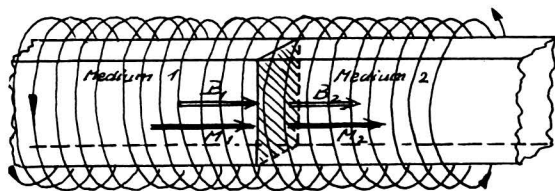
e.s.u.	SI
mit $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ und $\vec{B} = \mu\vec{H}$	mit $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ und $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$
wird $\vec{M} = \frac{\mu-1}{4\pi}\vec{H}$	wird $\vec{M} = (\mu-1)\vec{H}$
sodass $\chi = \frac{\mu-1}{4\pi}$	sodass $\chi = \mu-1$

Da die Permeabilität μ in beiden Masssystemen gleich ist (S.143), ist die Suszeptibilität im SI das 4π -fache der Suszeptibilität im e.s.u.. (Das Analoge gilt auch für die dielektrische Suszeptibilität. Vgl. S.57.)

Beachte, dass die magnetische Suszeptibilität diamagnetischer Materialien ($\mu < 1$) negativ ist.

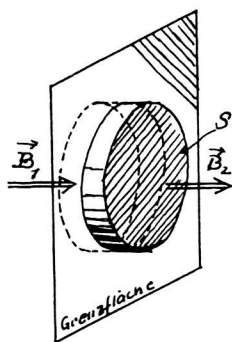
5.8. Bedingungen an Grenzflächen

a. Die Normalkomponente der Felder \vec{B} und \vec{H} .



Zwei verschiedene magnetisierbare Stangen grenzen aneinander in einer langen, stromdurchflossenen Spule. Wir suchen Zusammenhänge zwi-

schen dem Feldern \vec{B} , \vec{H} und \vec{M} auf beiden Seiten der Grenzfläche. Um viele Worte zu sparen, betrachten wir eine Stelle der Grenzfläche in der Nähe der Achse der Spule. Aus Symmetriegründen haben die zu diskutierenden Felder dann nur eine Komponente senkrecht zur betrachteten Grenzfläche. Das Problem wird mit der auf S. 24 eingeführten Dosenmethode behandelt:



Wir denken uns eine flache Dose mit der Querschnittsfläche S , deren Boden im Medium 1 und deren Deckel im Medium 2 ist. Nach dem Satz von Gauss aus der Vektoranalysis darf man schreiben $\iint_{\text{Oberfl.}} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \iiint_{\text{Volumen}} \text{div } \vec{B} d\tau$. Da es kei-

ne magnetischen Monopole gibt, verschwindet das Integral (S. 100). Für eine genügend kleine Dose dürfen die Felder als homogen betrachtet werden, sodass

$$\iint_{\text{Oberfl.}} \vec{B} \cdot d\vec{f} = (B_2 - B_1)S, \text{ also } B_2 = B_1. \text{ Allgemein gilt:}$$

Die Normalkomponente von \vec{B} ist stetig an der Grenzfläche zweier Medien.

Eines der beiden Medien könnte z.B. auch das Vakuum sein.

Das Verhalten der Normalkomponente von \vec{H} ergibt sich aus der Definition $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$. Wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ ist $\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$. Die Integration über die skizzierte Dose liefert

$$\left. \begin{aligned} \iiint_{\text{Volumen}} \text{div } \vec{H} d\tau &= \iint_{\text{Oberfl.}} \vec{H} \cdot d\vec{f} = (H_2 - H_1)S \\ -\iiint_{\text{Volumen}} \text{div } \vec{M} d\tau &= -\iint_{\text{Oberfl.}} \vec{M} \cdot d\vec{f} = -(M_2 - M_1)S \end{aligned} \right\} \begin{aligned} H_2 - H_1 &= M_1 - M_2 \\ \text{S.I.} \end{aligned}$$

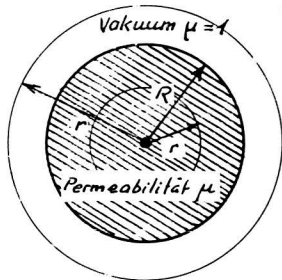
Allgemein gilt:

Die Normalkomponente von \vec{H} ist unstetig an der Grenzfläche zweier Medien.

(vgl. auch S. 140).

b. Tangentialkomponente der Felder \vec{H} und \vec{B}

Wir behandeln diesen Fall an einem Beispiel, in welchem aus Symmetriegründen nur eine Tangentialkomponente auftritt: Ein sehr langer, gerader Leiter, der vom Strom I durchflossen wird (Draht), liegt in der Achse eines magnetisierbaren Kreiszylinders vom Radius R . Das Zylindermaterial sei magnetisch isotrop und homogen und charakterisierbar durch die lineare Materialbeziehung $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$.



Im stationären Fall (S. 138) gilt

$\text{rot } \vec{H} = \vec{i}_{\text{Leit}}$ Integration dieser Gleichung über eine Kreisfläche vom Radius r , deren Achse der Draht ist, liefert

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{i} \cdot d\vec{s} = I \quad \text{Nach Stokes ist dann}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \underbrace{2\pi r}_{\text{Symmetrie}} H = I, \quad \text{also } H = \frac{I}{2\pi r}, \quad \text{sowohl für } r < R, \text{ als auch für } r > R. \text{ Allgemein gilt:}$$

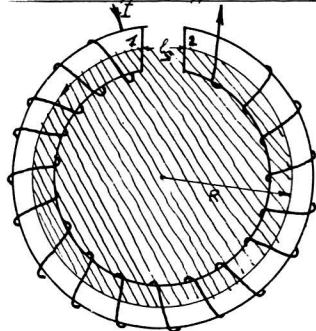
Die Tangentialkomponente von \vec{H} ist stetig an der Grenzfläche zweier Medien.

Da die Permeabilität μ springt an der Grenzfläche, gilt wegen $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$:

Die Tangentialkomponente von \vec{B} ist unstetig an der Grenzfläche zweier Medien.

c. Ein technisch wichtiges Anwendungsbeispiel:

Der Ringmagnet mit Luftspalt



Ein Ringkern aus einem Material mit hoher Permeabilität μ sei dicht bewickelt mit N Windungen eines Drahtes. Im Gegensatz zum Beispiel auf S. 141 sei der Ring nicht geschlossen, sondern habe einen Luftspalt der Breite l_{Luft} ($\mu=1$ für Luft in guter Näherung). Wenn der

Luftspalt sehr schmal ist im Vergleich zur Dicke des Ringes, ist die Ringsymmetrie der Anordnung nicht wesentlich gestört. Die radialen Komponenten des Feldes \vec{B} im Spalt können dann bei einer approximativen Behandlung des Problems vernachlässigt werden.

Der Strom in der Wicklung sei stationär, sodass man von der Gleichung $\text{rot } \vec{H} = \vec{i}_{\text{Lent}}$ ausgehen kann. Man integriert diese Gleichung über die schraffierte Kreisfläche mit dem Radius R und wendet wiederum den Satz von Stokes an:

$$\oint_{\text{Stokes}} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}}_{\text{im Material}} + \underbrace{\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}}_{\text{im Spalt}} = NI$$

Für ein homogenes, isotropes Material, für welches dazu noch die lineare Materialbeziehung $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ gilt, wird bei $\mu = 1$ im Spalt

$$\underbrace{\frac{1}{\mu} \left[\oint_{\text{Material}} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \oint_{\text{Spalt}} \vec{B} \cdot d\vec{s} \right]}_I \approx \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{B_{\text{Mat}}}{\mu} \ell_{\text{Mat}} + B_{\text{Spalt}} \ell_{\text{Spalt}} \right]}_{\substack{\text{Ring-} \\ \text{Geometrie}}} \stackrel{\substack{\text{Stetigkeit der} \\ \text{Normalkompo-} \\ \text{nente von } \vec{B}}}{=} \frac{1}{\mu_0} B \left(\frac{1}{\mu} \ell_{\text{Mat}} + \ell_s \right)$$

Die Auflösung nach B ergibt

$$B \approx \underbrace{\mu \mu_0 \frac{NI}{\ell_{\text{Mat}}}}_{B \text{ für } \ell_s = 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \mu \frac{\ell_s}{\ell_{\text{Mat}}}}}_{\text{Korrekturfaktor}}$$

Bei grosser Permeabilität genügt schon ein kleiner Luftspalt, damit B auf einen Bruchteil des Wertes für den geschlossenen Ring sinkt.

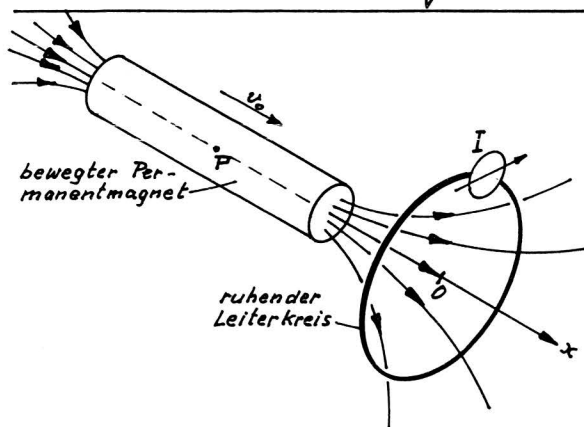
Der Laboratoriumsmagnet mit Eisenkern: Die lineare Beziehung $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ gilt nicht beim Eisen. Bei schwachem Felde H kann man anhand der Hysteresiskurve eine effektive Permeabilität definieren, die etwa der Steigung der Neukurve entspricht und von der Grössenordnung 10^4 ist. Wenn der Spalt von $\ell_s = 0$ ausgehend auf $10^{-4} \ell_{\text{Mat}}$ geöffnet wird, sinkt B schon auf die Hälfte. In der Praxis ist H meist so gross, dass das Material magnetisch "gesättigt" ist (flacher Ast der Hysteresiskurve). Die relative Abnahme von B beim Öffnen des Spaltes ist dann nicht so drastisch.

6. Das Induktionsgesetz von Faraday

Michael Faraday 1791 - 1867, um 1831

6.1. Eine experimentelle Tatsache und ihre Deutungen.

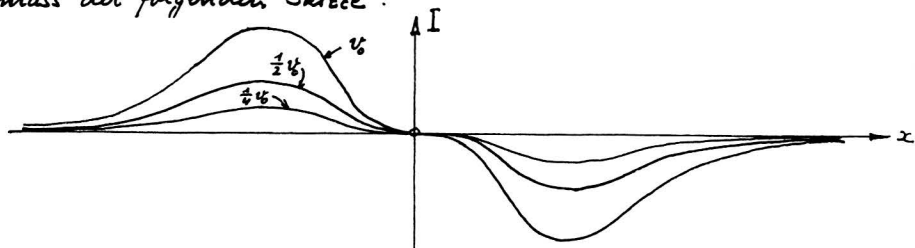
6.1.1. Der Induktionsstrom im geschlossenen Leiterkreis



Demonstrationsexperiment :

Ein permanenter Stabmagnet wird mit konstanter Geschwindigkeit durch eine geschlossene Drahtschleife gestossen. Solange der Magnet in Bewegung ist, fließt ein Strom. Bei Bewegung von links nach rechts verläuft die Stromstärke

als Funktion der Koordinate x der Mitte P des Magneten etwa gemäß der folgenden Skizze :



Bei umgekehrter Bewegungsrichtung erhält man die an der x -Achse gespiegelten Kurven.

Das induzierte elektrische Feld :

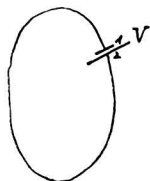
In einem gewöhnlichen Leiter fließt nur dann ein Strom, wenn ein elektrisches Feld herrscht (S. 75-85). Es ist $\vec{i} = \sigma \vec{E}$, wobei σ die Leitfähigkeit bedeutet. Für den Strom in einem Draht ist die Komponente des E -Feldes längs der Drahtachse massgebend. Der Stromdichtektor \vec{i} ist notwendigerweise parallel zur Drahtachse, da die Ladungs-

träger denselben seitlich nicht verlassen können. Wenn der Drahtdurchmesser klein ist im Vergleich zum Durchmesser der Drahtschleife kann die Stromdichte \vec{i} über die Querschnittsfläche A des Drahtes als homogen betrachtet werden, sodass

$$I = A i = A \sigma E_{\parallel}$$



der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Drahtmaterial homogen und der Querschnitt konstant sei. Bei einer Drahtlänge l ist dann der Widerstand $R = \frac{l}{\sigma A}$. Wenn wir den Strom I (statt durch Induktion) mit Hilfe einer Batterie erzeugen wollten, müsste diese nach dem Ohm'schen Gesetz eine Spannung



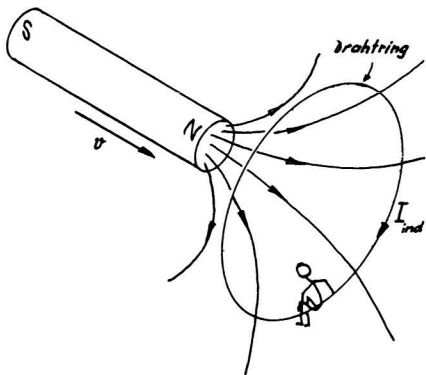
$V = RI = \frac{l}{\sigma A} I$ haben. Nach der Definition des Potentials ist dann $\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int E_{\parallel} ds = V_1 - V_2 = V$

Nun ist aber in unserem ^{Drahtschleife} Experiment keine Batterie vorhanden. Damit können wir annehmen, dass durch die Bewegung des Magneten ein Feld \vec{E} "induziert" wird, für welches gilt $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = RI \neq 0$

geschlossene
Schleife

Dies bedeutet, dass das induzierte Feld \vec{E} nicht als Gradient einer Potentialfunktion dargestellt werden kann.

Erste Interpretation des Experimentes:



Der Beobachter auf der Drahtschleife stellt fest: Der Stabmagnet nähert sich der Schleife und der Fluss des Feldes \vec{B} durch eine vom Draht berandete Fläche, die Grösse

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{f}, \text{ nimmt zu.}$$

(Wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ hängt der Fluss ϕ nicht von der Fläche ab bei fester Randkurve, wie auf S.

105/106 in einem andern Zusammenhang bewiesen wurde). Der Fluss Φ hängt nicht nur von der Lage, sondern auch von der Bewegung des Stabmagneten ab; denn auch der Induktionsstrom trägt zu Φ bei. Ein quantitatives Experiment ergibt folgenden Zusammenhang zwischen dem totalen Fluss Φ durch die Drahtschleife und dem Induktionsstrom I

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad RI = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{im e.s.u.}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Induktionsstrom so gerichtet ist, dass er der Flussänderung entgegenwirkt. Diese empirische Gleichung ist eine Integralbeziehung, indem

$$RI = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{und} \quad \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{f} . \quad \text{Es ist also}$$

$$\oint_{\text{Draht}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{vom Draht berandete Fläche}} \vec{B} \cdot d\vec{f} , \quad \text{und mit dem Satz von Stokes wird}$$

$$\iint_{\text{vom Draht berandete Fläche}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{vom Draht berandete Fläche}} \vec{B} \cdot d\vec{f} . \quad \text{Da die Schleife nach Voraussetzung weder Lage noch Form ändert, ist}$$

$$\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{f} = \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{f} , \quad \text{so dass} \quad \iint \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{f}$$

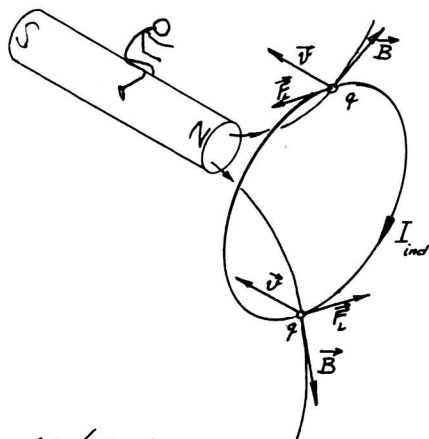
Da diese Beziehung für jede beliebige Schleife gilt, müssen die Integranden gleich sein:

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{im e.s.u.}$$

Diese elegante mathematische Formulierung des Induktionsgesetzes wird als zweite Maxwell'sche Feldgleichung bezeichnet. Sie gilt nicht nur im Vakuum, sondern auch bei Anwesenheit von leitendem, magnetisierbarem und elektrisch polarisierbarem Material.

Zweite Deutung des Experimentes:

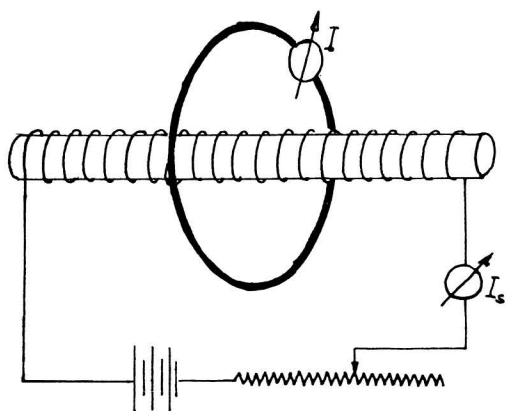
Das Auftreten eines Induktionsstromes im oben beschriebenen Experiment hätte vorausgesagt werden können auf Grund der Lorentz-



Kraft: Um dies einzusehen, setzen wir den Beobachter auf den Stabmagneten, sodass sich die Drahtschleife mit der Geschwindigkeit \vec{v} gegen den Magnet bewegt. Auf die Leitungselektronen mit der Ladung $q = -1,602 \cdot 10^{-19}$ Cb wirkt dann die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ (im SI). Sie hat eine Komponente parallel zum

Draht (bei coaxialer Anordnung von Draht und Magnet nur diese Komponente). Es wird also ein Strom im Kreise herum fließen. Das Ergebnis des auf S. 150 beschriebenen Experimentes kann also auf Grund der Lorentz-Kraft vorausgesagt werden.

Ein Fall, wo die zweite Interpretation nicht zum Ziel führt:



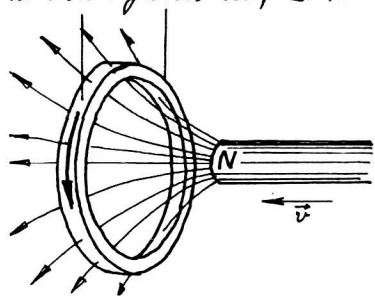
In der Drahtschleife befindet sich eine lange Spule, die sich nicht bewegt relativ zur Schleife. Man beobachtet nun folgendes: Wenn sich der Strom I_s durch die Spule zeitlich ändert, d.h. wenn $\frac{dI_s}{dt} \neq 0$, dann fließt ein Induktionsstrom I in der Drahtschleife.

Mit der Lorentz-Kraft kann man dies nicht verstehen, da die Schleife in Ruhe ist relativ zur Spule. Hingegen führt die erste Betrachtungsweise sofort zum Ziel: Wenn der Strom I_s verändert wird, dann ändert sich der Fluss des Feldes \vec{B} .

Die Richtung des Induktionsstromes:

Folgendes einfache Experiment zeigt, dass die Richtung des

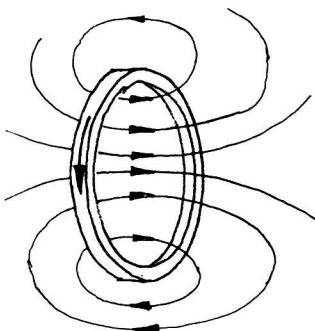
Induktionsstromes tatsächlich dem Umlaufstrom entspricht, den in den Figuren auf S. 150 und 152 angegeben ist: Ein Aluminium-



ring ist an zwei Fäden aufgehängt. Wenn man den Stabmagneten in der skizzierten Weise auf den Ring zu bewegt, wird dieser ausgelenkt in Richtung der Bewegung des Magneten. Wird der Magnet aus dem Ring herausgezogen, so folgt dieser wiederum

der Bewegung des Magneten. Die Kräfte wirken nur, solange sich der Magnet bewegt. Es kommt dabei nicht darauf an, welcher Pol des Magneten dem Ring zugewendet ist.

Die Interpretation des Phänomens ist einfach: Im Ring fließt



ein Induktionsstrom. Das \vec{B} -Feld des Stabmagneten hat eine Radialkomponente bezüglich des Ringes. Auf den Ring wirkt dann die Biot-Savart-Kraft. Sie ist für die beobachtete Bewegung des Ringes verantwortlich.

Auch der Induktionsstrom hat sein \vec{B} -Feld. Es ist nebenstehend skizziert. Es

ist so gerichtet, dass es die Änderung des Flusses des \vec{B} -Feldes des Magneten opponiert. Im skizzierten Fall wird die Zunahme des Flusses opponiert. Wenn man den Magneten aus dem Ring herauszieht, wird die Abnahme des Flusses opponiert. Allgemein gilt:

Der Induktionsstrom ist so gerichtet, dass sein \vec{B} -Feld der Flussänderung entgegenwirkt.

Das beobachtete Kräftespiel zeigt:

Der Induktionsstrom ist so gerichtet, dass die Biot-Savart Kraft die Relativbewegung zwischen Leiter und induzierendem Magneten hemmt.

Dies sind die Lenz'schen Regeln.

Zur Bestimmung der Richtung des Induktionsstromes in der auf S. 152 unten skizzierten Anordnung braucht man notwendigerweise die erste Regel, während beim Experiment auf S. 149 beide Regeln zum Ziele führen.

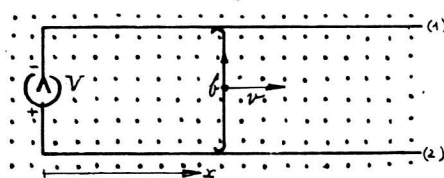
6.1.2. Induktionsgesetz und Lorentz-Kraft.

Wenn die zweite Deutung des Induktionsgesetzes (S. 151/152) richtig ist, muss sie quantitativ zum selben Wert des Umlaufintegrals $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ führen wie die elegante Formulierung auf S. 151. Wir bringen die letztere auf die Integralform zurück, indem wir schreiben $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$, wobei

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = RI$ als induzierte Spannung V_{ind} bezeichnet wird:

$$\boxed{V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{in S.I.} \quad \text{und} \quad \boxed{V_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Um der Komplikation der Veränderung des \vec{B} -Feldes des induzierenden Magneten durch den Induktionsstrom aus dem Wege zu gehen, betrachten wir den Fall des unterbrochenen Leiterkreises. Folgende Anordnung ist sehr übersichtlich:



Zwei parallele Drähte (1) und (2) befinden sich in einem homogenen, zeitlich konstanten Felde \vec{B}_0 , das senkrecht steht auf der Ebene, in der sie liegen.

Sie sind an ein Voltmeter angeschlossen, dessen Widerstand beliebig gross sei. (Man stelle sich z.B. ein Elektrometer vor.) Die beiden Leiter (1) und (2) sind durch einen beweglichen, leitenden Bügel mit Schleifkontakten verbunden. Wenn sich der Bügel mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt, werden die Leitungselektronen im Bügel durch die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ etwas gegen den Leiter (1) hin verschoben. Nach den Überlegungen auf S. 114/115 entsteht dann eine Potentialdifferenz $V = b v B$ zwischen den bei-

den Enden des Bügels. Der Leiter (1) und seine Zuleitung zum Elektrometer sind in Ruhe, d.h. ein Äquipotentialgebiet, und dasselbe gilt für den Leiter (2) und seine Zuleitung zum Elektrometer. Das Elektrometer wird also diese Potentialdifferenz unverfälscht anzeigen. *)

Dasselbe Resultat erhält man durch Anwendung der Integralform des Induktionsgesetzes $V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$: der Fluss des Feldes \vec{B}_0 durch die (beim Elektrometer unterbrochene) Leiterschleife beträgt

$$\Phi = x b B_0, \text{ sodass } V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dx}{dt} b B_0 = -v b B_0.$$

(Das negative Vorzeichen ist in diesem Falle völlig belanglos, denn es ist kein Umlaufsinn festgelegt worden. Übrigens kann man auch mit Hilfe der Lenz'schen Regel schliessen, dass der Leiter (1) negativ geladen wird. Man betrachtet dazu den Aufladestrom des Elektrometers.)

Es gibt viele Induktionsexperimente, die man sowohl mit der Lorentz-Kraft, als auch mit dem Induktionsgesetz erklären kann. Besonders einfach sind die Fälle, wo eine offene Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Felde \vec{B} bewegt oder deformiert wird. (Demonstrationen).

Ein Beispiel, das mit der Lorentz-Kraft nicht erklärt werden kann, sondern nur mit dem Induktionsgesetz, ist auf S. 152 skizziert. (Demonstrationen).

*) Insbesondere tritt hier der Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ nicht auf, denn die Leiter (1) und (2) sind nicht Lorentz-kontrahiert. Die Formel $|V| = b v B_0$ gilt hier streng (im Gegensatz zum Experiment, das auf S. 114-116 diskutiert wurde). Das Induktionsgesetz gilt streng, auch bei relativistischen Geschwindigkeiten der bewegten Leiter.

6.2. Induktionsgesetz und Energieerhaltung

Man ist versucht, die zweite Lenz'sche Regel (S. 153) irgendwie mit der Erhaltung der Energie in Zusammenhang zu bringen. Die auf S. 153 beschriebene Demonstration zeigt deutlich, dass mechanische Arbeit aufgewendet wird zur Erzeugung des Induktionsstromes. Um zu zeigen, dass dieser Zusammenhang nicht ganz trivial ist, sei hier ein einfaches Experiment diskutiert:

Betrachte zwei widerstandslose, parallele Leiter (1) und (2) die sich in einem von aussen produzierten, zeitlich konstanten, homogenen, auf der Ebene (1)(2) senkrecht stehenden Feld \vec{B} befinden. Die beiden Leiter sind einerseits durch einen Ohm'schen Widerstand R und andererseits durch einen beweglichen Bügel mit verschwindendem Widerstand verbunden. Wenn sich der Bügel mit der Geschwindigkeit v bewegt, dann liegt nach dem Induktionsgesetz $V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$ eine Spannung vom Betrage $|V| = b \cdot v \cdot B_0$ über dem Widerstand R , und es fließt ein Induktionsstrom $I = \frac{V}{R}$ in der Leiterschleife. Die im Widerstand in Wärme umgesetzte Leistung ist

$$VI = b \cdot v \cdot B_0 \cdot I = \underbrace{b I B_0}_{\text{Biot-Savart Kraft } F} \cdot v = F \cdot v$$

Dies ist aber gerade die mechanische Leistung, die zur Verschiebung des Bügels aufgewendet werden muss: Mechanische Arbeit wird vollständig in Joule'sche Wärme umgewandelt.

Diese Betrachtung ist oberflächlich und bringt uns sofort in Schwierigkeiten. Man braucht dazu nur zum Fall $R=0$ überzugehen. Der Strom $I = \frac{V}{R} = \frac{b \cdot v \cdot B_0}{R}$ und damit auch die Biot-Savart-Kraft würden unendlich gross bei endlicher Geschwindigkeit v . Der Bügel würde sich überhaupt nicht verschieben lassen! Das entspre-

chende Experiment kann mit einem Supraleiter ausgeführt werden. Man findet ein ganz anderes Verhalten: Der Bügel lässt sich mit endlicher Kraft verschieben; und zwar ist eine endliche rücktreibende Kraft da, welche den Bügel (gleichgültig nach welcher Richtung er verschoben wird) in die Ausgangslage zurückzieht. Für $v \ll c$ ist diese Kraft unabhängig von der Geschwindigkeit v .

No liegt der Fehler in der oberflächlichen Betrachtung? Wir haben etwas Wesentliches vergessen:

Das Feld \vec{B} des Induktionsstromes trägt auch zum Fluss Φ durch die Leiterschleife bei. Es ist der resultierende Fluss Φ , der in das Induktionsgesetz $V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$ einzusetzen ist.

Für den Fall $R=0$ bedeutet dies folgendes: Da nach dem Experiment I nicht unendlich gross wird, muss gelten $V_{\text{ind}}=0$, also $\frac{d\Phi}{dt}=0$, d.h. $\Phi = \text{const.}$

Deformiert man eine widerstandslose, geschlossene Leiterschleife in einem zeitlich konstanten, von aussen angelegten Felde \vec{B}_0 , dann sorgt der Induktionsstrom dafür, dass der resultierende Fluss des Feldes \vec{B} durch die Schleife konstant bleibt.

Bei einer Verkleinerung der Schleifenfläche nimmt also die Feldstärke B in der Schleife zu, und bei einer Vergrösserung der Schleifenfläche nimmt sie ab: Fluss-Kompression und Fluss-Dilatation. Durch Fluss-Kompression lassen sich sehr hohe Feldstärken erzeugen. Man braucht dazu aber nicht Supraleiter, da die Supraleitung durch hohe Magnetfeldstärken zerstört wird. Wenn man eine normalleitende Leiterschleife in einem äusseren Felde \vec{B} sehr schnell "zusammenschnürt," erhält man in der Schleife für kurze Zeit eine

grosse Feldstärke. Durch Implosion von Hohlzylindern aus Kupfer in einem äusseren Felde \vec{B}_0 längs der Zylinderachse sind mit Hilfe von brennbaren Sprengstoffen Feldstärken von rund 10^3 Tesla (10^7 Gauss) erreicht worden in einem Volumen von einigen cm^3 für Zeiten von der Grössenordnung 10^{-6} sec.

Bemerkungen zur Energiebilanz.

Wenn der Beitrag des Induktionsstromes zur zeitlichen Flussänderung $\frac{d\Phi}{dt}$ in der Schleife vernachlässigt werden kann gegen $\vec{v} \cdot \vec{B}_0$, dann ist die oberflächliche Betrachtung auf S. 156 eine gute Näherung (z.B. bei genügend grossem Widerstand R). Die zur Verschiebung des Bügels aufgewendete Arbeit wird dann tatsächlich im Widerstand R "verheizt".

Interessanter ist die Energie-Bilanz im Grenzfall $R=0$ da der Strom endlich bleibt beim Verschieben des Bügels, ist es nicht möglich dass Arbeit, die gegen die rücktreibende Kraft geleistet wird, in Wärme umgewandelt wird. Es bleibt nur eine Erklärungsmöglichkeit: die Arbeit wird gespeichert im resultierenden Felde \vec{B} , und kann dem Felde \vec{B} wieder entnommen werden, wenn der Bügel in die Ausgangs Lage zurückkehrt.

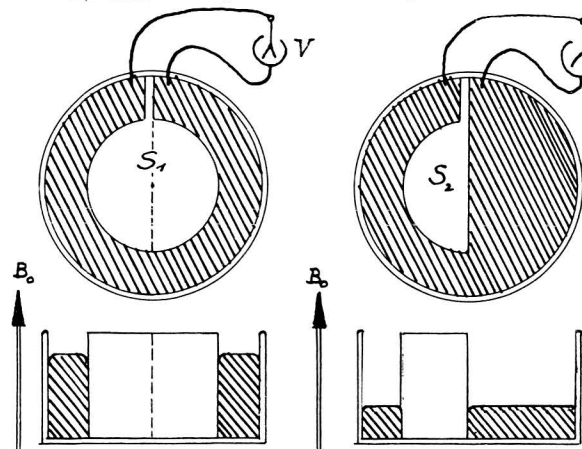
Man kommt damit zum Schluss, dass dem Felde \vec{B} eine Energiedichte zugeschrieben werden muss, ähnlich wie dem Felde \vec{E} (vgl. S. 45). Wir werden diese Energiedichte in einem der folgenden Abschnitte berechnen.

6.3. Fälle, bei denen die Integralform des Induktionsgesetzes nicht anwendbar ist

Die Anwendung der Integralform des Induktionsgesetzes, $V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$, setzt voraus, dass ein wohldefinierter Integra-

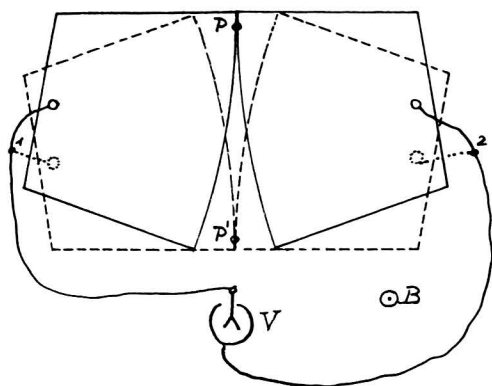
tionsweg bei $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ existiert. Im Falle von dünnen Drähten ist der Integrationsweg eindeutig. Sobald aber zwei- oder dreidimensionale leitende Gebiete vorkommen, ist die Integralform nutzlos.

1. Beispiel: Ein zylindrisches Gefäß enthalte Quecksilber. Ein zweiteiliger



isolierender Körper ist so geformt, dass das Quecksilber nach dem Eintauchen dieses Körpers einen geöffneten Ring bildet. Dieser ist an ein ballistisches Voltmeter angeschlossen. (Dieses Instrument kann einen "Spannungsschoss" $\int V(t) dt$ messen.) Das Gefäß befindet sich in einem homogenen, zeitlich konstanten, vertikalen Felde \vec{B}_0 . Wenn der rechte Teil des isolierenden Körpers herausgenommen wird, vermindert sich die vom Leiter umschlossene Fläche von S_1 auf S_2 . Durch Anwendung der Integralform $V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ berechnet man einen Spannungsschoss $\int V(t) dt = \int d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B_0 \cdot (S_2 - S_1)$. Das Experiment gibt weniger!

2. Beispiel (aus den "Feynman Lectures"): Zwei Kupferplatten mit einem



leicht gekrümmten Rand befinden sich in einem homogenen, zeitlich konstanten Felde \vec{B}_0 senkrecht zur Plattenfläche. Sie sind in der skizzierten Weise mit einem ballistischen Voltmeter verbunden. Bei einer kleinen Krümmung des Randes genügt eine sehr kleine Bewegung, um den Berührungspunkt von P

(ausgezogene Lage) nach P' (gestrichelte Lage) zu versetzen. Der beobachtete Spannungsschoss ist viel kleiner, als man auf Grund

der Änderung der Schleife von 1-P-2-V-1 auf 1-P'-2-V-1 erwartet nach der Integralform $V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Wenn der Krümmungsradius der sich berührenden Plattenränder sehr gross wird, genügt eine sehr kleine Bewegung der Platten, um den Berührungspunkt von P nach P' zu bringen. Der Spannungsschoss strebt schliesslich gegen null!

Auf die zweite Maxwell'sche Gleichung.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

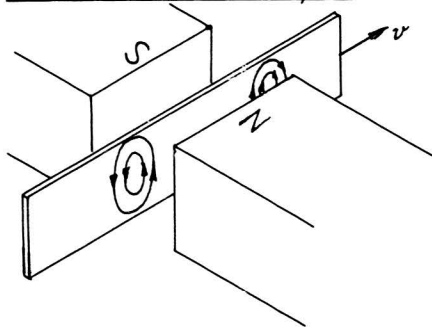
und die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

kann man sich hingegen immer verlassen.

6.4. Wirbelströme

Erstes Demonstrationsexperiment:

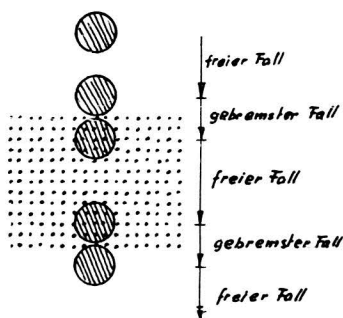


Ein gut leitendes Blech wird zwischen den Polen eines starken Magneten hindurchgeschoben. Die Kraft, die aufgewendet werden muss, ist proportional zur Geschwindigkeit: Es werden im Blech Ströme induziert, die so gerichtet sind, dass sie die Bewegung hemmen (S. 153). Die Ströme fliessen

in der Randzone des \vec{B} -Feldes, denn nur dort ändert sich der Fluss durch eine Fläche, die wir uns auf dem Blech markiert denken. Die am Blech geleistete mechanische Arbeit wird ganz in Joule'sche Wärme umgewandelt im Sinne der Betrachtung auf S. 156. Diese zirkulierenden Ströme werden als Wirbelströme bezeichnet.

(Anmerkung: Im auf S. 114-116 diskutierten Experiment haben wir ein schlecht leitendes Material benutzt, eine Legierung, sodass sich die Wirbelströme nicht bemerkbar machten. Konzeptionell kann man sich auch vorstellen, dass dort der ganze Metallstreifen im B-Feld eingetaucht war.)

Zweites Demonstrationsexperiment: Eine Aluminiumscheibe wird fallen



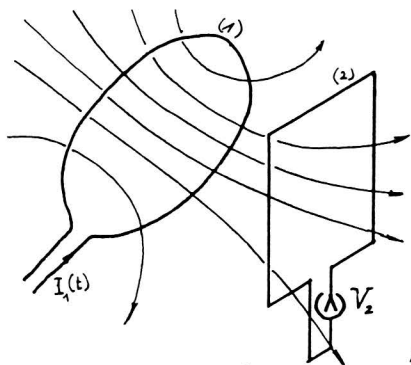
gelassen durch den Luftspalt eines Magneten, in dem ein annähernd homogenes B-Feld herrscht. Beim Eintritt in das Feld wird die Scheibe gebremst. Sobald sie ganz ins Feld eingetaucht ist, fällt sie wieder frei, da sich der Fluss durch die Scheibe nicht ändert. Beim Austritt wird sie dann wieder gebremst. Erst wenn sie das Feld ganz verlassen hat, fällt sie wieder frei. In einer geschlitz-



ten Scheibe können sich die Wirbelströme viel weniger ausbilden, und sie fällt beinahe ungehemmt.

6.5. Gegenseitige Induktion und Selbstinduktion

6.5.1. Die gegenseitige Induktion von Leiterschleifen



Betrachte zwei feste Leiterschleifen (1) und (2). In (1) flüsse ein zeitabhängiger Strom $I_1(t)$. Die Schleife (2) sei offen, sodass kein Strom fließen kann. Das Feld \vec{B} und damit auch der Fluss Φ durch die Schleife (2) ist dann proportional zu I_1 . Das Induktionsgesetz darf in der Form $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ bedenkenlos angewendet werden. Das Elektrometer an (2) zeigt dann eine

Induktionsspannung V , die proportional zu $\frac{dI_1}{dt}$ ist.

Spannung, die proportional ist zu $\frac{dI_2}{dt}$. Man definiert einen Koeffizienten L_{12} der gegenseitigen Induktion durch die Gleichung

$$V_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{in jedem Masssystem}).$$

Dieser Koeffizient ist als positive Grösse definiert. Das negative Vorzeichen in der Gleichung deutet nur an, dass bei geschlossener Schleife (2) der Induktionsstrom der Flussänderung entgegenwirkt.

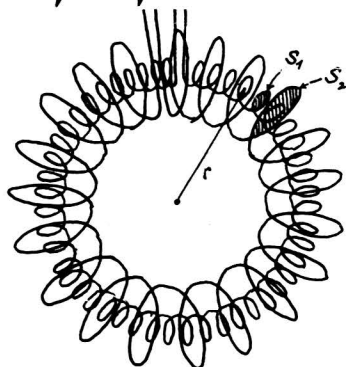
Nun vertauschen wir die Rollen der beiden Schleifen: Durch (2) werde ein Strom $I_2(t)$ geschickt, und an der (offenen) Schleife (1) werde die Induktionsspannung V_1 gemessen. Analog zu oben kann man dann schreiben

$$V_1 = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

Das Reziprozitätsgesetz: Bei zwei gleichen Schleifen sieht man sofort ein, dass $L_{12} = L_{21}$, insbesondere dann, wenn sie symmetrisch angeordnet sind. Weniger trivial ist die Gültigkeit dieser Reziprozität für beliebige Schleifen in beliebiger Anordnung. Ein neues Naturgesetz steckt nicht hinter der Reziprozität: Das Feld \vec{B} eines in einem Draht fließenden Stromes kann mit Hilfe des Vektorpotentials \vec{A} berechnet werden (S. 106-109). Dann kennt man aber auch den Fluss durch eine zweite Schleife, und durch Anwendung des Induktionsgesetzes gelangt man zur induzierten Spannung.

Wir zeigen die Reziprozität zunächst am Beispiel von zwei übereinander gewickelten Ringspulen mit folgenden Daten:

	innere Spule	äussere Spule
Windungszahl	N_1	N_2
Ringquerschnitt	S_1	S_2
Länge	$2\pi r$	$2\pi r$



Bei schlanken ($R \gg$ Ringdicke), dicht bewickelten Ringen ist das Feld auf dem unwickelten Raum beschränkt und dort annähernd homogen. Wenn nur durch die innere Spule ein Strom I_1 fließt, ist die Feldstärke in ihrem Innern nach S. 103 gegeben durch $B_1 \approx \frac{\mu_0}{2\pi r} N_1 I_1$. Analog gilt für das Feld in der äusseren Spule

$B_2 \approx \frac{\mu_0}{2\pi r} N_2 I_2$ wenn nur in dieser Spule der Strom I_2 fließt.

Wenn in der Spule 1 ein Strom $I_1(t)$ fließt, dann misst man zwischen den Wicklungsenden der Spule 2 nach der Integralform des Induktionsgesetzes die Spannung

$$V_2 = -N_2 \frac{d}{dt} (B_1 S_1) = - \underbrace{N_2 S_1 \frac{\mu_0}{2\pi r} N_1}_{L_{12}} \frac{dI_1}{dt}$$

Wenn in der Spule 2 ein Strom $I_2(t)$ fließt, dann misst man zwischen den Wicklungsenden der Spule 1 die Spannung

$$V_1 = -N_1 \frac{d}{dt} (B_2 S_1) = - \underbrace{N_1 S_1 \frac{\mu_0}{2\pi r} N_2}_{L_{21}} \frac{dI_2}{dt} \quad , \quad \text{so dass}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{N_1 N_2 S_1}{r} \quad \text{g. e. d.}$$

Allgemeiner Beweis: Sei Φ_{12} der Fluss des Feldes \vec{B} durch die Schleife 2 erzeugt durch den Strom I_1 in der Schleife 1 und analog Φ_{21} der Fluss durch die Schleife 1 erzeugt durch den Strom in der Schleife 2. Es ist dann

$$V_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{und} \quad V_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad , \quad \text{also nach der Definition von } L_{ij}$$

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 \quad \text{und} \quad \Phi_{21} = L_{21} I_2 \quad .$$

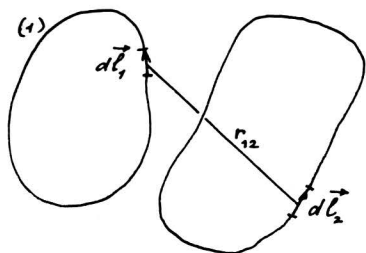
Zum Beweis der Reziprozität $L_{12} = L_{21}$ müssen wir zeigen, dass

$$\Phi_{21} = \Phi_{12} \quad \text{bei} \quad I_1 = I_2 :$$

$\Phi_{12} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{f} = \iint \text{rot } \vec{A}_1 \cdot d\vec{f}$, wobei \vec{A}_1 das Vektorpotential ist, das der in der Schleife (1) zirkulierende Strom I erzeugt.
Fläche von (1) begrenzt
 Durch Anwendung des Satzes von Stokes wird dann

$$\Phi_{12} = \oint_{\text{Schleife (2)}} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2, \text{ wobei } d\vec{l}_2 \text{ das Linienelement der Schleife (2) ist.}$$

Nun ist \vec{A}_1 zu finden am Orte des Linienelementes $d\vec{l}_2$: Der Beitrag des Linienelementes $d\vec{l}_1$ zum Vektorpotential am Orte des Linienelementes $d\vec{l}_2$ ist nach S. 108



$$d\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}, \text{ wobei } r_{12} \text{ der absolute Betrag des Abstandes der beiden}$$

Schleifenelemente bedeutet. Damit wird

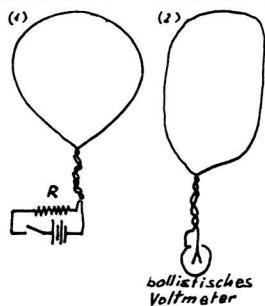
$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(1)} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \quad \text{und} \quad \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(2)} d\vec{l}_2 \oint_{(1)} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}$$

Ganz analog erhält man $\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(1)} d\vec{l}_1 \oint_{(2)} \frac{d\vec{l}_2}{r_{21}}$ } Die Reihenfolge der Integrationen darf vertauscht werden. Ferner ist $r_{12} = r_{21}$, sodass

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} \quad \text{q.e.d.}$$

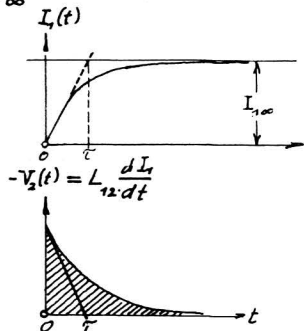
Demonstrationsexperimente:

Der induzierte Spannungsschoss $\int V(t) dt$ wird mit einem ballistischen Voltmeter gemessen. Der Ausschlag dieses Instrumentes ist proportional zum Spannungsschoss, wenn die Schwingungsdauer des Instrumentes lang ist im Vergleich zur Dauer des Spannungsschosses. Wir werden später zeigen, dass der Strom in der Primärschleife (in der Skizze (1)) nach dem Schliessen des Schalters (zur Zeit $t=0$) nicht sprunghaft ansteigt, sondern sich nach einem anfänglich schnellen Anstieg asymptotisch dem stationären Wert I_∞ nähert. Die Anstiegszeit τ ist im Demonstrationsexperiment



von der Grössenordnung 10^{-3} sec , während die Schwingungsdauer des ballistischen Voltmeters rund eine sec beträgt.

Betrachten wir (1) als Primärspule, dann beträgt der Ausschlag des an die Sekundär-



spule angeschlossenem ballistischen Voltmeters

$$\int_0^{t \gg \tau} V_2(t) dt = -L_{12} \int_0^{t \gg \tau} \frac{dI_1}{dt} dt \approx -L_{12} I_{1,00} \text{ in sehr guten Näherung}$$

Bei vertauschten Rollen der beiden Spulen haben wir

$$\int_0^{t \gg \tau} V_1(t) dt = -L_{21} \int_0^{t \gg \tau} \frac{dI_2}{dt} dt \approx -L_{21} I_{2,00}.$$

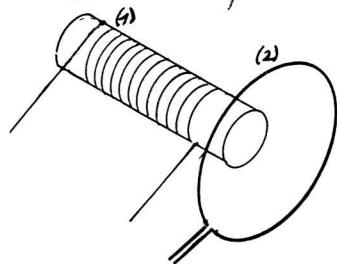
Durch geeignete Widerstände im Primärkreis sorgen wir dafür, dass $I_{1,00} = I_{2,00}$. Das Experiment zeigt, dass die ballistischen Ausschläge gleich sind, d.h. es ist $L_{12} = L_{21}$.

Reziprozität bei Anwesenheit magnetisierbarer Materie:

Die Reziprozität bleibt erhalten, wenn der ganze felddurchflossene Raum mit einem beliebigen homogenen, magnetisierbaren Material erfüllt wird, auch dann, wenn die Materialbeziehung $\vec{B}(\vec{H})$ nicht linear ist (Vgl. S. 142). Sie bleibt auch erhalten, wenn nur ein Teil des felddurchflossenen Raumes mit einem magnetisierbaren Medium erfüllt wird, vorausgesetzt, dass für dieses die Beziehung $\vec{B}(\vec{H})$ linear ist.

Zusammenbruch der Reziprozität:

Die Reziprozität geht im allgemeinen verloren, wenn ein nicht-lineares Material nur einen Teil des Raumes erfüllt. Man sieht dies sofort an folgendem Beispiel: Das nicht-lineare



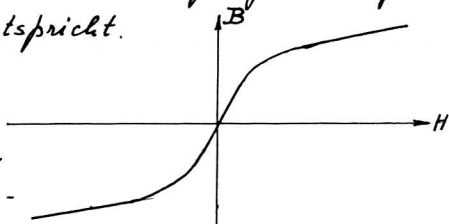
Material erfülle die Spule (1). Sein magnetisches Verhalten entspreche der skizzierten Funktion, die einer Sättigung der Magnetisierung entspricht.

Wenn (2) als

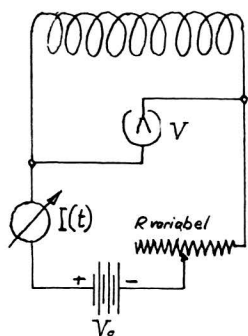
Primärkreis

funktioniert, ist H schwach, und der steile Teil der $B(H)$ Kurve ist massgebend.

Wenn hingegen (1) als Primärkreis benutzt wird, kommen die Sättigungsäste zur Geltung. (Demonstrationen).



6.5.2. Der Koeffizient der Selbstinduktion



Eine Spule, deren Ohm'scher Widerstand vernachlässigbar sei (dicker Kupferdraht), werde über einen variablen Vorschaltwiderstand R an eine Batterie mit der konstanten Spannung V_0 angeschlossen. Wenn ein konstanter Strom durch die Spule fließt, kann die Spannung zwischen den Klemmen der Spule wegen ihres kleinen Ohm'schen Wider-

standes vernachlässigt werden. Wenn man aber den Strom durch die Spule zeitlich ändert, etwa durch Änderung des Vorschaltwiderstandes R , dann zeigt das Voltmeter zwischen den Klemmen der Spule eine Spannung V , deren Vorzeichen beim Anwachsen des Stromes ($\frac{dI}{dt} > 0$) entgegengesetzt dem Vorzeichen beim Abnehmen ($\frac{dI}{dt} < 0$) ist.

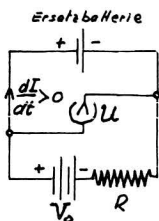
Die Interpretation des Phänomens ist einfach: Wenn sich der Strom durch die Spule zeitlich ändert, dann ändert sich auch der Fluss Φ des Feldes B durch die Spule, und zwar ist sowohl im Falle des Vakuums, als auch bei einer linearen Beziehung $\vec{B} = \mu \vec{H}$, der Fluss Φ proportional zum Strom I (Man kann sich dies leicht überlegen anhand des Ringmagneten mit und ohne Spalt. Vgl. S. 147/148). Es ist damit auch $\frac{d\Phi}{dt}$ proportional zu $\frac{dI}{dt}$, und nach der Integralform des Induktionsgesetzes ist V prop. $\frac{dI}{dt}$.

Man definiert nun einen Koeffizienten L der Selbstinduktion, indem man schreibt

$$V = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{in allen Masssystemen})$$

L ist immer positiv. Das Minuszeichen kann dann wie folgt interpretiert werden:

Nach S. 153 ist die Induktionsspannung so gerichtet, dass der entsprechende Strom die Flussänderung schwächt. Wendet man diese Regel auf die hier betrachtete Situation an, so heisst dies, dass sich bei anwachsender Stromstärke die Spule sozusagen wie eine Batterie verhält, welche der wirklichen Batterie V_0 entgegengeschaltet ist. Am Widerstand R liegt dann nicht die Batteriespannung V_0 , sondern die Spannung $V_0 - L \frac{dI}{dt}$, d.h. es ist



$$RI = V_0 - L \frac{dI}{dt} < V_0 \quad \text{bei} \quad \frac{dI}{dt} > 0$$

und analog

$$RI = V_0 - L \frac{dI}{dt} > V_0 \quad \text{bei} \quad \frac{dI}{dt} < 0$$

Man kann diesen Umstand auch wie folgt formulieren:

Bei anwachsendem Strom ist die selbstinduzierte Spannung so gerichtet, dass sie das Anwachsen "verhindern will" und bei abnehmendem Strom ist sie so gerichtet, dass sie das Weiterfliessen des Stromes "begünstigt".

Die Selbstinduktion simuliert sozusagen eine Trägheit des Stromes. Diese "Trägheit" ist im allgemeinen viel grösser als die Trägheit, welche von der Masse der beweglichen Ladungsträger (Leitungselektronen) herrührt. Die letztere beginnt erst bei Wechselströmen sehr hoher Frequenz ($\nu \sim 10^{10} \text{ sec}^{-1}$) eine Rolle zu spielen.

Mass und Dimension der Selbstinduktion:

Aus der Definitionsgleichung folgt:

$$\text{c.s.u.} \quad [L] = \frac{\text{statvolt sec}}{\text{statamp}} = \text{stathenry}$$

$$\text{SI} \quad [L] = \frac{\text{Volt sec}}{\text{Amp}} = \text{Henry (H)}$$

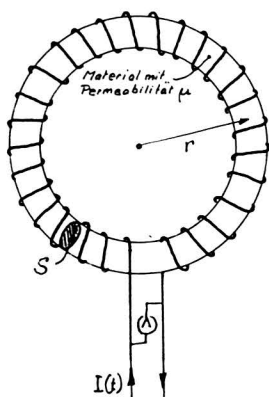
Umrechnung:

$$1 \text{ stathenry} = \frac{300 \text{ Volt sec}}{\frac{1}{3 \times 10^9} \text{ Amp}} = 9 \times 10^{11} \text{ H}$$

Beachte, dass für die Umrechnung der Kapazität der reziproke Umrechnungsfaktor gilt, indem nach S. 39 $1 \text{ cm} = \frac{1}{9 \times 10^{11}} \text{ Farad}$.

Das Produkt LC hat in beiden Systemen dieselbe Masszahl und dieselbe Dimension sec^2 .

Berechnung des Koeffizienten der Selbstinduktion für eine Ringspule, deren Kern die Permeabilität μ hat:



Nach S. 148 gilt im Kern ohne Spalt

$$B(t) = \mu \mu_0 \frac{N I(t)}{\ell} \quad (\text{näherungsweise})$$

wobei N = Windungszahl, $\ell = 2\pi r$

Der magnetische Fluss, der durch die Leiterschleife (die N Windungen aufweist) hin durchtritt, beträgt

$$\Phi_N(t) = S N B(t) = \mu \mu_0 \frac{S N^2}{\ell} I(t)$$

Die induzierte Spannung ist nach der Integralform des Induktionsgesetzes

$$V = -\frac{\partial \Phi_N}{\partial t} = -\underbrace{\mu \mu_0 \frac{S N^2}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} \quad \text{Es ist also}$$

$$L = \mu \mu_0 \frac{S N^2}{\ell}$$

im SI und

$$L = \mu \frac{4\pi}{c^2} \frac{S N^2}{\ell} \quad \text{in e.s.u.}$$

Da für Vakuum $\mu = 1$ einzusetzen ist, illustriert diese Formel folgenden allgemeinen Satz:

Wenn der vom B-Feld einer Leiterschleife (Spule) erfüllte Raum mit einem magnetisierbaren Material der Permeabilität μ gefüllt ist, dann ist die Selbstinduktion das μ -fache des Wertes für Vakuum.

Aus der Integralform des Induktionsgesetzes

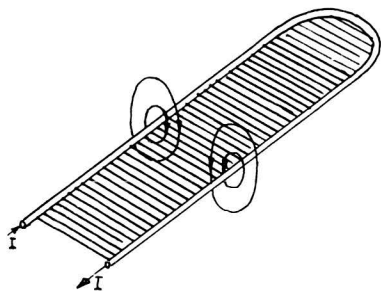
$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{und der Definition des Selbstinduktionskoeffizienten}$$

$$V = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{folgt sofort die allgemeine Beziehung}$$

$$\Phi = L I \quad \text{im SI und} \quad \Phi = c L I \quad \text{in e.s.u.}$$

Φ ist im Sinne des obigen Φ_N zu verstehen. Diese Beziehung eignet sich in vielen Fällen zur direkten Berechnung von L .

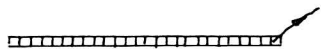
Zur Problematik der Berechnung der Selbstinduktion: Die obige Berechnung der Selbstinduktion eines ungewickelten Ringes verschleiert eine wesentliche Problematik, wie folgendes Beispiel illustrieren soll.



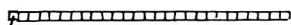
Betrachte eine lange Leiterschleife, die im Wesentlichen aus einem Paar paralleler Drähte besteht. Massgebend zur Berechnung der Selbstinduktion mit der Beziehung $\Phi = LI$ ist der Fluss Φ des Feldes \vec{B} durch die schraffierte Fläche.

Diese ist wohldefiniert im Falle linearer (∞ dünner) Leiter. Die Schwierigkeit ist nun folgende: Die Feldstärke B , die im Abstand r von einem langen, geraden Stromdurchflossenen Leiter herrscht, ist nach S. 99 proportional zu $1/r$ damit divergiert aber der Fluss Φ logarithmisch für $r \rightarrow 0$. Für unendlich dünne Drähte wird die Selbstinduktion unendlich gross! Nehmen wir Leiter endlicher Dicke, dann haben wir aber Schwierigkeiten, die Fläche zu definieren, durch die der Fluss Φ hindurchtritt!

Bei dicht gewickelten, langen, schlanken Spulen wirken sich diese Schwierigkeiten nicht stark aus: Die dichte



Wicklung wirkt nach aussen wie ein Flächenstrom. Das Feld eines

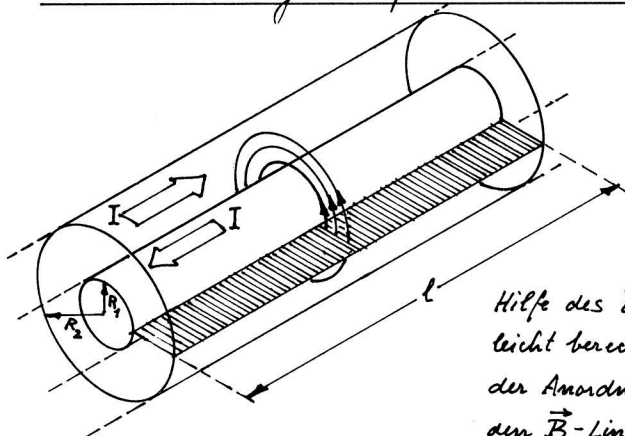


Flächenstromes divergiert aber nicht,

wenn man sich der Stromfläche nähert. Im Grenzfall eines breiten, langen Bandes ist B sogar unabhängig vom Abstand (s. Übungsaufgaben). Die Formeln auf S. 168 sind deshalb keine schlechte Näherung.

6.5.3. Die Selbstinduktion von Leitungen

Die koaxiale Leitung als unproblematisches Beispiel:



Hin- und Rückleitung des Stromes I erfolge über dünnwandige Kreiszylinder vom Radius R_1 bzw. R_2 . Das \vec{B} -Feld im Raum lässt sich mit

Hilfe des Zirkulationsintegrals (S.101) leicht berechnen wegen der Symmetrie der Anordnung. Man integriert längs den \vec{B} -Linien, die koaxiale Kreise sind

und erhält im SI

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1 & \longrightarrow B = 0 \\ \mu_0 I & \text{für } R_1 < r < R_2 & \longrightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \\ 0 & \text{für } r > R_2 & \longrightarrow B = 0 \end{cases}$$

Zur Berechnung der Selbstinduktion benutzen wir die Beziehung $\Phi = LI$ (S.168). Für das skizzierte Kabelstück der Länge l ist der Fluss des \vec{B} -Feldes durch die schraffierte Fläche massgebend:

$$\Phi = \iint_{\text{Fläche}} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{l}{r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1}, \text{ sodass}$$

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Damit haben wir für die Selbstinduktion pro Längeneinheit

$$\boxed{L^* = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{L^* = \frac{2}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Der Zusammenhang zwischen Kapazität und Selbstinduktion: Nach S. 41 ist die Kapazität eines Zylinderkondensators der Länge l gegeben durch

$$C \approx 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad C \approx \frac{l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{in e.s.u.}$$

diese Formel gilt umso genauer, je länger der Zylinderkondensator ist; denn die Ungenauigkeit der Rechnung rührt von den Enden her. Für eine lange Leitung gilt also exakt folgende Formel für die Kapazität pro Längeneinheit:

$$C^* = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad C^* = \frac{1}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{in e.s.u.}$$

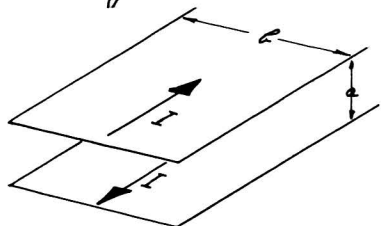
Damit wird

$$\boxed{L^* C^* = \epsilon_0 \mu_0} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{L^* C^* = \frac{1}{c^2}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Nach S. 13/14 gilt $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ (wobei c in m sec^{-1} ausgedrückt ist). Auch im SI darf man also schreiben $L^* C^* = \frac{1}{c^2}$. Diese Beziehung gilt nicht nur für die koaxiale Leitung, sondern ganz allgemein, vorausgesetzt, dass die Felder \vec{B} und \vec{E} in Vakuum verlaufen.

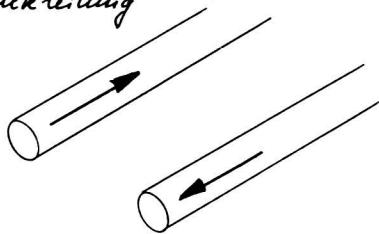
Beispiele:

- ① Parallele Bänder als Hin- und Rückleitung



(Für $a \ll b$ ist die Rechnung sehr einfach.)

- ② Parallele Röhre als Hin- und Rückleitung



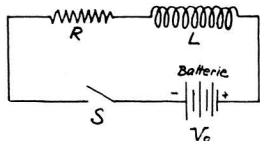
Wenn der Raum, der von den Feldern \vec{B} und \vec{E} durchflutet wird, mit einem Material der Permeabilität μ und der Dielektrizitätskonstanten ϵ ausgefüllt ist, dann ist L^* das μ -fache und C^* das ϵ -fache des Vakuumwertes (vgl. S. 168 und 57), sodass

$$L^* C^* = \frac{\epsilon \mu}{c^2}$$

in beiden Masssystemen. c bedeutet die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

6.5.4. Ein- und Ausschalten einer Selbstinduktion.

Nach S. 167 wirkt sich eine Selbstinduktion in einem Stromkreise so aus, als ob der Strom eine Trägheit hätte. Nach dem Einschalten kann er also nicht sofort mit unendlicher Stärke fließen.



In der skizzierten Schaltung werde der Schalter S zur Zeit $t=0$ geschlossen. Gesucht ist $I(t)$ nach dem Einschalten:

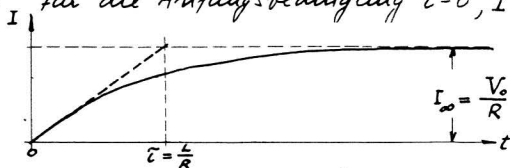
Solange der Strom I anwächst, liegt nicht die ganze Batteriespannung V_0 am Widerstand R , denn in der Selbstinduktion wird eine Spannung induziert, die so gerichtet ist, dass sie das Anwachsen des Stromes opponiert:

Die Spannung am Widerstand ist nach S. 167

$$RI = V_0 - L \frac{dI}{dt}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet für die Anfangsbedingung $t=0, I=0$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

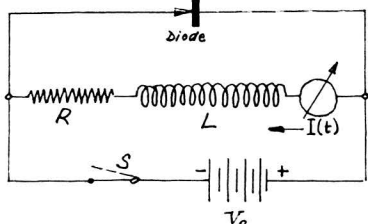


die Zeitkonstante des Einschaltvorganges ist $\tau = \frac{L}{R}$

Problematischer ist der Ausschaltvorgang: Wenn es gelänge, den Strom durch Öffnen des Schalters plötzlich zu unterbrechen, dann wäre $dI/dt \rightarrow \infty$, d.h. an der Selbstinduktion entstünde eine unendlich grosse Spannung.

Diese ist so gerichtet, dass der Strom die Tendenz hat, weiterzufließen. Die hohe Abschaltspannung bewirkt, dass sich zwischen den Kontakten des Schalters beim Öffnen ein Lichtbogen bildet.

Die hohe Induktionsspannung, die beim Abschalten grosser Spulen (Elektromagnete) entsteht, kann zur Zerstörung des Schalters oder des Isolationsmaterials in der Spule führen. Dies lässt sich vermeiden durch Parallelschaltung einer Diode. (Eine Diode ist eine Einrichtung, welche den Strom nur in einer Richtung passieren lässt.)

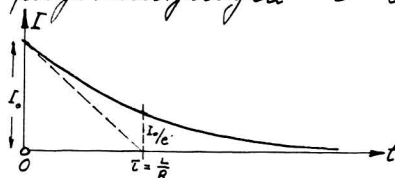


Die Diode wird so gepolt, dass beim Einschalten und Anwachsen des Stromes, sowie im stationären Zustand ($t \rightarrow \infty$, $I(t) \rightarrow I_\infty$) kein Strom durch sie hindurchfliesst. (Der Pfeil im Diodensymbol gibt die Durchlassrichtung an.)

$I(t)$ verläuft beim Einschalten gemäss der Skizze auf S. 172.

Wir nehmen nun an, der Schalter S werde geöffnet im Augenblick, wo der Strom $I(t)$ die Stärke I_0 erreicht habe. Dieser Zeitpunkt ist der Anfang eines neuen Experimentes, und wir setzen $t=0$. Der Strom durch die Spule kann trotz dem Unterbruch bei S weiterfließen, nämlich durch die Diode. Da der Batteriezweig keine Rolle mehr spielt und die Diode in der Durchlassrichtung einen vernachlässigbar kleinen Widerstand hat, ist die Differentialgleichung $RI = -L \frac{dI}{dt}$ zu lösen mit den Anfangsbedingungen $t=0$, $I = I_0$. Man erhält einen exponentiellen Abfall

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

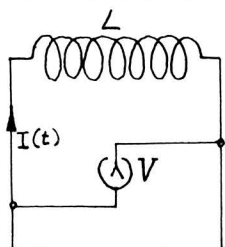


In der Zeit $\tau = \frac{L}{R}$ ist der Strom auf den e -ten Teil gesunken. (Demonstrationen mit dem grossen Elektromagneten).

Bei einem nicht-linearen Materialgesetz $\vec{B}(\vec{H})$ treten Abweichungen vom Exponentialgesetz auf. Beim Elektromagnet mit Eisenkern machen sich diese deutlich bemerkbar, wenn der Luftspalt geschlossen wird. Das Feld \vec{B} wird dann so gross, dass die Magnetisierung gesättigt ist. (Demonstrationen).

6.6. Energiebetrachtungen

6.6.1. Die Energiedichte des magnetischen Feldes.



Betrachte eine Spule mit der Selbstinduktion L , deren Ohm'scher Widerstand vernachlässigbar sei. Der Strom $I(t)$ durch die Spule werde von Anfangswert null auf den Wert I gesteigert, z.B. mit der auf S. 166 skizzierten Schaltung. Beim Steigern des Stromes wird an der Spule elektrische Arbeit geleistet. Definitionsgemäss ist die elektrische Arbeit das Produkt aus transportierter Ladung und Potentialdifferenz. Die elektrische Arbeit, die in der Zeit dt in die Selbstinduktion hineingesteckt wird, ist gegeben durch

$$dW^e = -V dQ = L \frac{dI}{dt} I dt = LI dI$$

Wenn der Strom die Stärke I erreicht hat, ist die gesamte elektrische

Arbeit
$$\boxed{W^e} = \int_0^I dW^e = L \int_0^I I dI = \boxed{\frac{1}{2} LI^2}$$

Nun stellt sich die Frage: Wo steckt diese Energie? Im Joule'sche Wärme ist sie nicht umgewandelt worden, da der Ohm'sche Widerstand nach Voraussetzung vernachlässigbar sein soll. Sie ist auch nicht unwiederbringlich ins Weltall abgestrahlt worden, wie das auf S. 173 beschriebene Abschaltexperiment zeigt: Man kann sich leicht überzeugen, dass die Energie W^e , die beim Anwachsen des Stromes in die Selbstinduktion hineingesteckt wurde, nach dem Öffnen des Schalters

im Widerstand R verheizt wird.

Es ist so: die Energie ist im magnetischen Felde gespeichert und kann dem Felde wieder entnommen werden, indem man den Strom durch die Spule abnehmen lässt.

Die Energiedichte w des Feldes \vec{B} berechnen wir analog zur Energiedichte des elektrischen Feldes (S. 45). Anstelle der elektrischen Arbeit, die es braucht, zum Aufladen eines Kondensators ($W = \frac{1}{2} CV^2$), müssen wir hier die elektrische Arbeit einsetzen, die es braucht, um den Strom in einer Spule von null auf I ansteigen zu lassen, $W = \frac{1}{2} LI^2$. Andererseits gilt auch $W = \iiint w d\tau$, wenn wir über den vom Feld durchflossenen Raum integrieren:

Betrachte die auf S. 103 und S. 168 behandelte Ringspule. Wenn sie sehr schlauk ist und dicht bewickelt, ist das Feld B im Inneren homogen und ausserhalb null. Für den Fall des Vakuums ist dann

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \quad \text{und} \quad L = \mu_0 \frac{SN^2}{\ell}$$

$\ell = 2\pi r$, S = Querschnittsfläche, N = Windungszahl
damit wird

$$W = \iiint w d\tau = \ell S w \quad \text{innerseits, und}$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{SN^2}{\ell} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{SN^2}{\ell} \cdot \frac{\ell^2}{\mu_0^2 N^2} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} S \ell B^2 \quad \text{andereits.}$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke für die Energie W liefert

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

im SI und

$$W = \frac{1}{8\pi} B^2$$

in e.s.u.

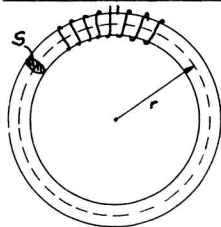
Magnetisches Material im Ring: Wir beschränken uns hier auf die lineare Materialbeziehung $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$. Sonst werden die Betrachtungen sehr knifflig. Für einen Ring ohne Spalt ist dann $L = \mu\mu_0 \frac{SN^2}{\ell}$ (S. 168) und $B = \mu\mu_0 \frac{NI}{\ell}$, woraus

$$W = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2$$

im SI und

$$W = \frac{1}{8\pi\mu} B^2$$

in e.s.u.



Mit $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ bzw. $\vec{B} = \mu \vec{H}$ wird

$$w = \frac{1}{2} H B \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad w = \frac{1}{8\pi} H B \quad \text{in e.s.u.}$$

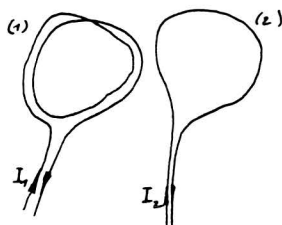
Die allgemeine Formel für die Energiedichte ist

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{w = \frac{1}{8\pi} \vec{H} \cdot \vec{B}} \quad \text{in e.s.u.}$$

Ein scheinbares Paradoxon: Betrachte zwei gleiche Ringspulen, die vom selben Strom I durchflossen werden. Die eine Spule sei leer, die andere gefüllt mit einem Medium der Permeabilität μ . Da die Selbstinduktion der gefüllten Spule μ mal grösser ist als diejenige der leeren Spule, ist auch die Energie in der gefüllten Spule μ mal grösser. Beim Einfüllen des Materials mit $\mu > 1$ erhöht sich also die Energie in einer Spule, wenn der Strom I konstant gehalten wird. Naïverweise würde man nun schliessen, dass man Arbeit aufwenden müsse, um das Material in die Spule zu bringen; d.h. man erwartet, dass man das Material in die Spule hineinwerfen muss.

Das Experiment zeigt gerade das Gegenteil: Material mit $\mu > 1$ wird in eine Spule hineingezogen. Die Erklärung des Phänomens ist einfach: Man muss die Stromquelle, die in diesem Falle voraussetzungsgemäss so konstruiert ist, dass sie den Strom I konstant hält, in die Energiebetrachtung einbeziehen. Beim Einfüllen des magnetisierbaren Mediums nimmt B und damit der Fluss Φ durch die Windungsfläche der Spule zu. Die induzierte Spannung ist so gerichtet, dass die Stromquelle elektrische Arbeit leistet an der Spule.

6.6.2. Die Energie eines Systems von zwei Leiterschleifen.



Betrachte ein System von zwei Leiterschleifen (1) und (2), die vom Strom I_1 bzw. I_2 durchflossen werden. Die Selbstinduktionskoeffizienten seien L_{11} und L_{22} und der Koeffizient der Gegeninduktion L_{12} . Wir nehmen an, dass die Reziprozitätsbedingungen (S. 165) erfüllt sind.

Frage: Wie gross ist die Energie, die im resultierenden Magnetfeld steckt?

Die Felder \vec{B} der beiden Schleifen addieren sich vektoriell. Die Energiedichten hingegen dürfen nicht addiert werden; denn $(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$. Die Energien $W_1 = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$ und $W_2 = \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$ dürfen also nicht einfach addiert werden. Das korrekte Ergebnis ist

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} L_{11} I_1^2}_{\text{Energie des ersten Systems allein}} + \underbrace{\frac{1}{2} L_{22} I_2^2}_{\text{Energie des zweiten Systems allein}} \pm \underbrace{L_{12} I_1 I_2}_{\text{Wechselwirkungsenergie}}$$

Das Vorzeichen der Wechselwirkungsenergie hängt vom relativen Umlaufsinn der Ströme I_1 und I_2 ab. Die Formel ist leicht zu verifizieren am Beispiel der übereinandergewickelten Ringspulen (vgl. S. 162-163).

7. Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom.

7.1. Die Symmetrie der Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{B} im Vakuum

Die Transformationsformeln für die Felder \vec{E} und \vec{B} (S. 112) zeigen eine erstaunliche Symmetrie: Sie ändern sich nicht, wenn man \vec{B} durch \vec{E} und \vec{E} durch $-\vec{B}$ ersetzt. Wir postulieren nun eine neue Gleichung, indem wir diesen Ersatz

vornehmen in der zweiten Maxwell'schen Feldgleichung (S. 151). Da die Transformationsformeln im e.s.u.-System hingschrieben wurden, rechnen wir zunächst in diesem System

Aus $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ wird $\boxed{\text{rot } \vec{B} = +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ e.s.u.

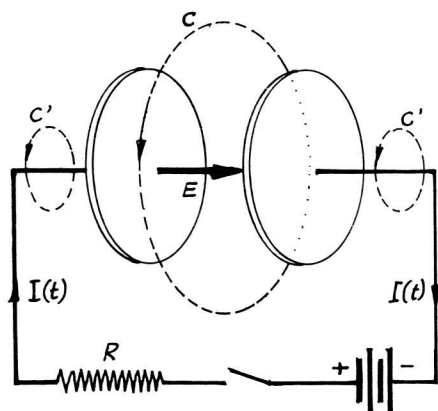
Diese Formel ist tatsächlich im Einklang mit der Natur, aber nur für den Fall des Vakuums: Sie wird als erste Maxwell'sche Feldgleichung (für das Vakuum) bezeichnet. Im SI sehen die Transformationsformeln etwas anders aus. Sie ändern sich nicht, wenn man \vec{B} durch $\epsilon_0 \vec{E}$ und \vec{E} durch $-\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ ersetzt. Aus

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ wird $\boxed{\text{rot } \vec{B} = +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ SI

Mit Hilfe des Satzes von Stokes gehen wir zur Integraldarstellung über, die etwas anschaulicher ist:

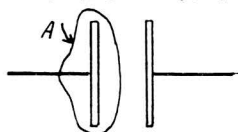
$$\oint_{\text{geschlossene Kurve } C} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\text{Fläche von } C \text{ berandet}} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

Ein sich zeitlich verändernder Fluss des Feldes \vec{E} hat eine nicht verschwindende Zirkulation des Feldes \vec{B} zur Folge. Wir betrachten eine Anordnung, die diese Situation realisiert: Ein Plattenkondensator im Vakuum wird aufgeladen



von einer Batterie über einen Widerstand. Dabei nimmt die Feldstärke zwischen den Platten und damit der Fluss des Feldes \vec{E} mit der Zeit zu. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Platten genügend nahe beieinander sind, sodass der ganze Feldfluss, der von der linken Platte ausgeht und auf der rechten Platte endet, durch die skizzierte Randkurve C fließt:

$$\iint_{\text{geschl. Fläche } A} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \iint_{\text{von } C \text{ begrenzte Fläche}} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (\text{vgl. S. 91})$$



Damit wird $\frac{d}{dt} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} I$, also $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$.

Denselben Wert für das Zirkulationsintegral erhält man, wenn man den Integrationsweg um die Zuleitung zum Kondensator legt (S. 100). Wenn man das \vec{B} -Feld betrachtet, dann sieht es so aus, als ob der Strom I zwischen den Platten weiterfließen würde. Dieser scheinbare Strom wurde von Maxwell Verschiebungsstrom genannt. (Das Vakuum verhält sich scheinbar wie ein polarisierbares Dielektrikum, in dem sich beim Vorgang der Polarisation Ladungen verschieben. Vgl. S. 53, 91.). Man kann nun eine Dichte $\vec{i}_{\text{versch.}}$ dieses Verschiebungsstromes einführen, indem man schreibt

$\epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{i}_{\text{versch.}} \cdot d\vec{f}$, wobei sich beide Integrale über dieselbe, beliebige Fläche erstrecken, sodass

$$\vec{i}_{\text{versch.}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{im SI} \quad \text{und} \quad \vec{i}_{\text{versch.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{in e.s.u.}$$

Anmerkung: Im Vakuum ist $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (S. 137) und $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ (S. 58). Die erste Maxwell'sche Gleichung für das Vakuum kann also in SI wie folgt geschrieben werden:

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

7.2. Die Rotation der Felder \vec{B} und \vec{H} im allgemeinen Fall

Wenn sich zwischen den Platten des auf S. 178 skizzierten Kondensators ein dielektrisch polarisierbares Material befindet, das zudem noch leitet und magnetisiert ist, dann kommen zum Maxwell'schen Verschiebungsstrom noch hinzu:

- der Polarisationsstrom $\vec{i}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ (SI und e.s.u.) : Im Gegensatz zu S. 106 ist der Zustand nicht stationär.
- der Leitungsstrom $\vec{i}_{\text{leit}} = \sigma \vec{E}$ (SI und e.s.u.), S. 79
- der Molekularstrom $\vec{i}_{\text{mol}} = \text{rot } \vec{M}$ (SI), $\vec{i}_{\text{mol}} = c \text{rot } \vec{M}$ (e.s.u.), S. 136

Alle Ströme tragen zu $\text{rot } \vec{B}$ bei. Unter Einschluss des Maxwell'schen Ver-

schlebungstroms hat man also (im SI)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 (\vec{i}_{\text{pol}} + \vec{i}_{\text{leit}} + \vec{i}_{\text{mol}})$$

Diese Gleichung tritt anstelle von $\text{rot } \vec{B} = \vec{i}$, wenn der Zustand nicht stationär ist
Umgeformt mit Hilfe der Beziehungen

$$\vec{i}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{und} \quad \vec{i}_{\text{mol}} = \text{rot } \vec{M}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \text{wird}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{i}_{\text{leit}}}$$

Analog ist in e.s.u.

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{pol}} + \vec{i}_{\text{leit}} + \vec{i}_{\text{mol}})$$

$$\text{Mit } \vec{i}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad \text{und} \quad \vec{i}_{\text{mol}} = c \text{rot } \vec{M}, \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad \text{wird}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{i}_{\text{leit}}}$$

Dies ist die erste Maxwell'sche Feldgleichung für den Fall, wo sich Materie im Felde befindet.

8. Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen

Die Phänomenologie der Erscheinungen, die wir bis zu dieser Seite kennen gelernt haben, kann mit folgenden fünf Gleichungen vollständig beschrieben werden:

SI	e.s.u.
$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{tot}}$	$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho_{\text{tot}}$
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{i}_{\text{leit}}$	$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{i}_{\text{leit}}$
$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] + q\vec{E}$	$\vec{F} = \frac{1}{c} q[\vec{v} \times \vec{B}] + q\vec{E}$

Frage: Warum ist die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (S.90), die das fundamentale Prinzip der Ladungserhaltung ausdrückt, nicht unter den wichtigsten Gleichungen aufgeführt?

Antwort: Die Kontinuitätsgleichung folgt aus diesen Gleichungen.

Beweis: Wir schreiben die vierte Gleichung in ihrer ursprünglichen Form (S.180 oben):

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{i}_{\text{tot}} \quad \text{wobei} \quad \vec{i}_{\text{tot}} = \vec{i}_{\text{pol}} + \vec{i}_{\text{ext}} + \vec{i}_{\text{mol}}$$

Die Anwendung des Operators div auf diese Gleichung unter Berücksichtigung der Identität $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ liefert

$$0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{i}_{\text{tot}}, \quad \text{und mit} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{tot}}$$

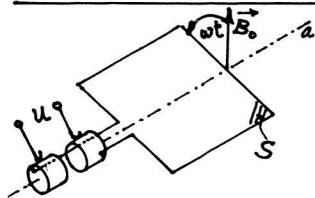
$$0 = \frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{i}_{\text{tot}} \quad \text{q.e.d.}$$

9. Aus der Technik der Wechselströme

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Wechselströmen von "nicht zu hoher Frequenz", d.h. wir machen eine Approximation. Bei strenger Behandlung von Phänomenen, die mit zeitlich variierenden elektrischen und magnetischen Feldern zusammenhängen, muss man berücksichtigen, dass sich diese mit endlicher Geschwindigkeit, nämlich der Lichtgeschwindigkeit, ausbreiten. Wir betrachten hier den Fall, wo die Ausbreitungszeit im System vernachlässigbar ist: Die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\omega}$ der Felder soll gross sein im Vergleich zur Ausbreitungszeit durch das System hindurch.

Beispiel: Bei der Frequenz des Wechselstroms, der von unseren Kraftwerken geliefert wird, $\nu = 50 \text{ sec}^{-1}$, kann die Ausbreitungszeit vernachlässigt werden, wenn die Linearabmessungen des Systems klein sind gegen $\frac{c}{\nu} = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$.

9.1. Die komplexe Schreibweise



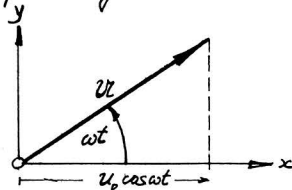
Eine Leiterschleife mit der Windungsfläche S rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem konstanten, homogenen Feld \vec{B}_0 , das senkrecht steht

auf der Drehachse a . Die induzierte Spannung ist nach S. 154 $U = -\frac{d\Phi}{dt}$ ¹⁸² *)
 Wenn der Stromkreis nicht geschlossen ist, trägt nur das äussere Feld \vec{B}_0 zum
 Fluss Φ durch die Schleife bei, sodass $\Phi = B_0 S \sin \omega t$ und

$$U(t) = (-)\omega B_0 S \cos \omega t = U_0 \cos \omega t \quad **)$$

Wenn man den Stromkreis schliesst, z.B. durch einen Ohm'schen Widerstand, dann
 schwächt der flussende Strom die zeitliche Änderung des Flusses des Feldes \vec{B}_0
 (S. 153). Die Berücksichtigung dieses Effektes ist gleichbedeutend mit der Berücksichtigung
 der Selbstinduktion der rotierenden Schleife. Um unsere Überlegungen nicht unnötig zu komplizieren,
 nehmen wir an, dass sowohl die Selbstinduktion als auch der Ohm'sche Widerstand der Schleife vernachlässigbar
 seien. Die Spannung zwischen den Klemmen ist dann unabhängig vom Strom, und es ist immer
 $U = U_0 \cos \omega t$: Wir setzen einen idealen Wechselspannungsgenerator voraus.

Um den unübersichtlichen Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen aus dem Wege zu gehen,
 wenden wir bei Wechselstromproblemen denselben Trick an wie bei den stationären Schwingungsproblemen
 der Mechanik (Physik I S. 185) und gehen über zur komplexen Schreibweise.
 Damit beschränken wir uns auf "stationäre" Wechselströme bzw. Wechselspannungen.



Die Wechselspannung des skizzierten Generators wird als komplexe Zahl dargestellt:

$$U_L = U_0 e^{i\omega t}$$

Der Realteil ist die physikalische Wechselspannung $U = U_0 \cos \omega t$. In der komplexen Ebene rotiert der Vektor U_L mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Nullpunkt.

Auf der Skala von Wechselstromvoltmetern ist normalerweise eine effektive Wechselspannung angegeben, die fol-

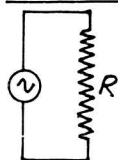
*) In der Technik bezeichnet man die elektrische Spannung mit U und nicht mit V .



**) Das Vorzeichen spielt insofern keine Rolle, als keine der beiden Klemmen der skizzierten Maschine ausgezeichnet ist. Wir dürfen U_0 als positive Grösse betrachten.

gender massen definiert ist: $U_{\text{eff}} = \sqrt{U^2}$. Bei $U = U_0 \cos \omega t$ ist $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$. Analog definiert man eine effektive Stromstärke $I_{\text{eff}} = \sqrt{I^2}$.

Die einfachsten Schaltelemente

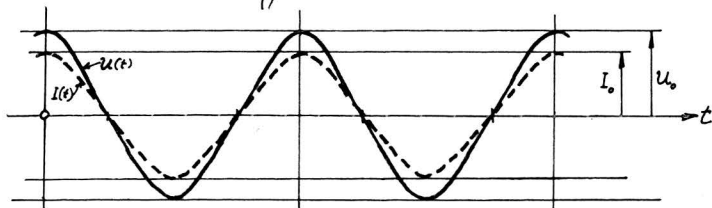
① Der Ohm'sche Widerstand R



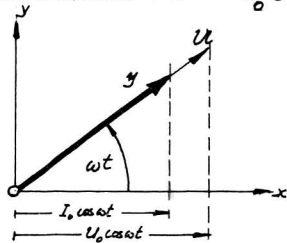
Ein Ohm'scher Widerstand R (Symbol ) werde an einen idealen Wechselspannungsgenerator (Symbol ) angeschlossen. In reeller Schreibweise gilt nach dem Ohm'schen Gesetz

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

Zwischen Spannung und Strom besteht in diesem Spezialfall keine Phasenverschiebung.

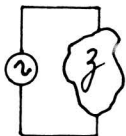


Wie die Spannung lässt sich auch die Stromstärke als komplexe Grösse darstellen: $y = I_0 e^{i\omega t}$. In der komplexen Ebene liegt hier y auf demselben Strahl wie U .



Der Quotient $\frac{U}{y} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\omega t}} = R$ ist in diesem Fall reell und gleich dem Ohm'schen Widerstand.

② Verallgemeinerung



An den idealen Wechselspannungsgenerator sei irgend eine Schaltung (eine "schwarze Kiste" mit zwei Klemmen) angeschlossen. Die Untersuchung mit Hilfe eines Oszilloskops ergebe, dass der Strom nicht in Phase ist mit

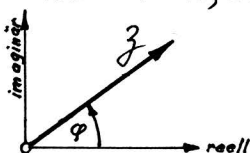
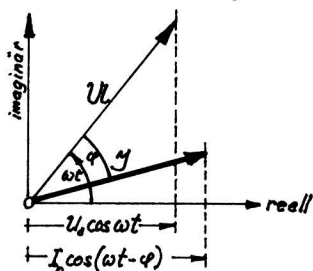
mit der Generatorspannung $U = U_0 \cos \omega t$. Es sei

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \text{ wobei}$$

I_0 proportional zu U_0
 φ unabhängig von U_0 } Definition des linearen Schaltelements

In komplexer Schreibweise ist $\mathcal{Y} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$. In Analogie zum Ohm'schen Widerstand definiert man einen komplexen Widerstand, eine sog. Impedanz \mathcal{Z} durch die Beziehung

$$\mathcal{Z} = \frac{U}{\mathcal{Y}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

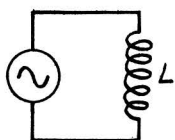


Die Vektoren U und \mathcal{Y} drehen sich beide mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung, wobei der Winkel zwischen ihnen den konstanten Wert φ hat.

Der absolute Betrag der Impedanz \mathcal{Z} wird Scheinwiderstand genannt: $|\mathcal{Z}| = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$.

Der Ohm'sche Widerstand entspricht einer reellen Impedanz $\mathcal{Z} = R$, da $\varphi = 0$.

③ Die Selbstinduktion



Eine Spule mit verschwindendem Ohm'schem Widerstand sei an einen idealen Wechselspannungsgenerator angeschlossen. Wenn ein zeitabhängiger Strom fließt, ist die Spannung zwischen den Klemmen der Spule gemäß der Definition der Selbstinduktion (S. 166) gegeben durch $U_L = -L \frac{dI}{dt}$. Sie muss in jedem Augenblick entgegengesetzt gleich der Generatorspannung sein; denn sonst würde ein unendlich grosser Strom fließen wegen der Voraussetzung $R = 0$. Damit haben wir

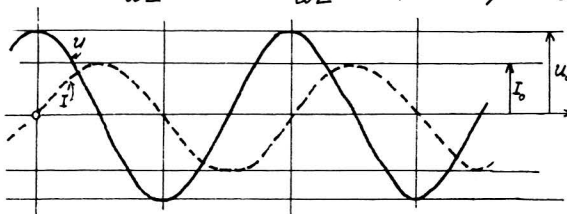
$$-L \frac{dI}{dt} = -U_0 \cos \omega t$$

Die Integration über die Zeit liefert

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t + \text{const.} \text{ Da in der Anordnung keine Stromrich.}$$

lung ausgerechnet ist, muss die Integrationskonstante verschwinden, und es ist

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

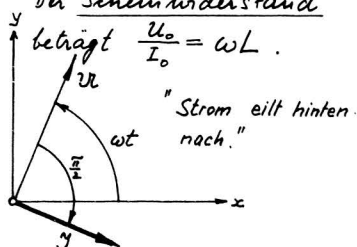


Die Bedingungen für die Linearität des Schaltelementes sind erfüllt:*)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} = \text{const.}, I_0 \text{ prop. } U_0$$

Der Scheinwiderstand

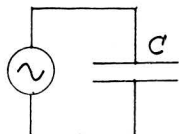
$$\text{beträgt } \frac{U_0}{I_0} = \omega L.$$



Komplexe Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 e^{i\omega t} \\ y &= \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{Z = \frac{U}{y} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega L}}}$$

④ Der Kondensator

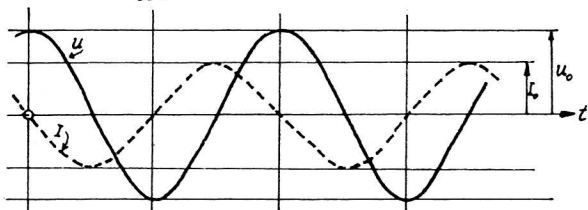


Nach der Definition der Kapazität (S. 38) gilt

$$Q = CU = CU_0 \cos \omega t$$

Der Strom in den Zuleitungen eines Kondensators beträgt nach S. 91

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



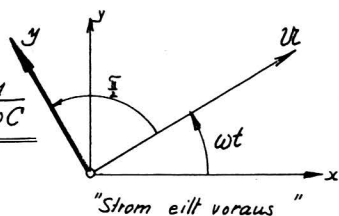
Die Bedingungen für die Linearität sind erfüllt:*)

Der Scheinwiderstand

$$\text{beträgt } \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

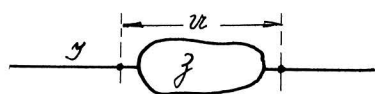
Komplexe Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 e^{i\omega t} \\ y &= \omega C U_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{Z = \frac{U}{y} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\omega C}}}$$



*) Wir haben stillschweigend ein lineares Materialgesetz vorausgesetzt.

Anmerkung: Der ideale Wechselspannungsgenerator wurde nur aus didaktischen Gründen eingeführt. Im allgemeinen ist eine Impedanz Z nicht an einen solchen Generator angeschlossen, sondern sie stellt ein Glied dar in einem Netzwerk von Impedanzen. Wenn durch

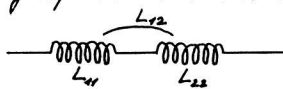


die Impedanz Z ein komplexer Strom I fließt, dann ist die komplexe Spannung über der Impedanz

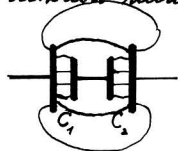
$U = Z I$, wobei für Z die oben berechneten Werte einzusetzen sind.

⑤ Serieschaltung von unabhängigen Impedanzen.

Wir nennen zwei Impedanzen unabhängig, wenn weder elektrische noch magnetische Felder von der einen Impedanz zur andern übergreifen. Am besten macht man sich dies an Gegenbeispielen klar:

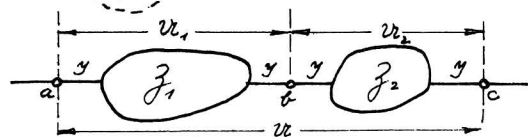
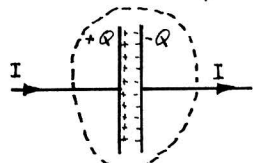


Zwei Selbstinduktionen L_{11} und L_{22} sind nicht unabhängig, wenn der Koeffizient der Gegeninduktion nicht verschwindet.



Die skizzierten Kondensatoren sind nicht unabhängig.

Wir betrachten zunächst den idealisierten Fall unabhängiger Impedanzen. Er ist in vielen Fällen annähernd realisiert. Wesentlich bei dieser Näherung ist, dass der einem Schaltelement zufließende Strom zu jeder Zeit gleich dem wegfließenden Strom ist; denn als Ganzes gesehen ist jedes Schaltelement ungeladen. Dies gilt auch für den Kondensator: Die eine Platte hat die Ladung $+Q$ und die andere die Ladung $-Q$. Die Gleichheit des zufließenden und wegfließenden Stroms gilt selbstverständlich auch in der komplexen Schreibweise. (Bei den oben skizzierten abhängigen Kondensatoren sieht man sofort, dass der Betrag der Ladung der grösseren Platte über demjenigen der kleineren Platte liegt.)



Nach der Definition des Potentials addieren sich die reellen Potential-

differeenzieren in einer Serieschaltung:

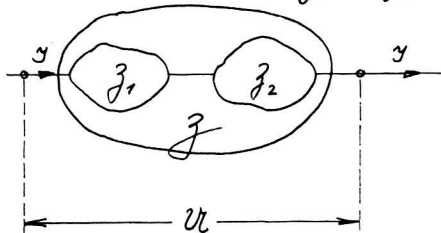
$$\underbrace{\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{s}}_U = \underbrace{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_1} + \underbrace{\int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_2} \quad \text{Es ist also } U = U_1 + U_2$$

Damit darf man auch die komplexen Spannungen addieren; denn der Realteil der Summe ist die Summe der Realteile und das entsprechende gilt für die Imaginärteile:

Bei einer Serieschaltung von komplexen Impedanzen Z_i addieren sich die komplexen Spannungen U_i über diesen Impedanzen.

Bei jeder Impedanz Z_i ist der zufließende Strom gleich dem abfließenden Strom. Bei einer Serieschaltung fließt deshalb derselbe Strom durch die Impedanzen:

$$U = U_1 + U_2 = Y Z_1 + Y Z_2 = Y (Z_1 + Z_2)$$

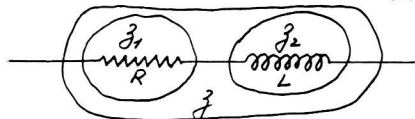


Wir können die Serieschaltung als neue Impedanz Z auffassen. Nach der Definition der Impedanz ist $U = Y Z$, sodass $Z = Z_1 + Z_2$

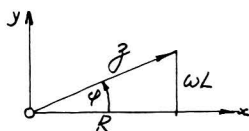
Bei einer Serieschaltung addieren sich die komplexen Impedanzen.

Beispiele:

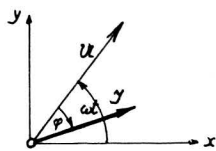
- a) Serieschaltung eines Ohm'schen Widerstandes R mit einer Selbstinduktion L



$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = R \quad (\text{S. 183}) \\ Z_2 = i\omega L \quad (\text{S. 185}) \end{array} \right\} Z = R + i\omega L$$



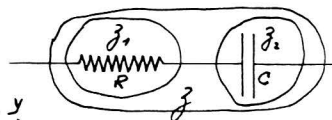
Aus der Darstellung der komplexen Impedanz in der Gauss'schen Zahlenebene liest man den Scheinwiderstand $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ab, sowie die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und



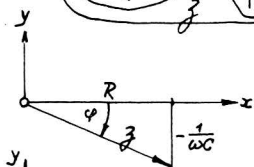
Spannung: $\lg \varphi = \frac{\omega L}{R}$

Bei tiefen Frequenzen verhält sich die Impedanz Z angenähert wie ein Ohm'scher Widerstand R und bei hohen Frequenzen wie eine Selbstinduktion L .

b) Serienschaltung eines Ohm'schen Widerstandes R mit einem Kondensator C .



$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= R \quad (\text{S. 183}) \\ Z_2 &= \frac{1}{i\omega C} \quad (\text{S. 185}) \end{aligned} \right\} Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C}$$



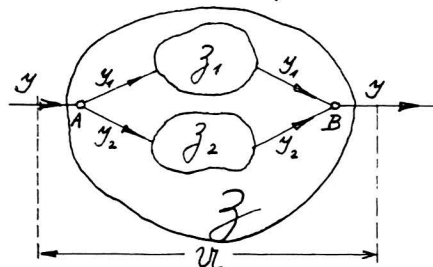
der Scheinwiderstand ist $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, und für die Phasenverschiebung gilt

$$\lg \varphi = -\frac{1}{\omega RC}$$

Bei tiefen Frequenzen verhält sich die Impedanz Z annähernd wie ein Kondensator der Kapazität C und bei hohen Frequenzen wie ein Ohm'scher Widerstand R .

"Hohe" und "tiefe" Frequenzen bedeutet in diesen Beispielen folgendes: Es kommt darauf an, ob die Zeit $\frac{1}{\omega}$ (d.h. Schwingungsdauer/ 2π) klein oder gross ist im Vergleich zu den vorkommenden Zeitkonstanten, nämlich $\tau = \frac{L}{R}$ im ersten Beispiel (vgl. S. 172) und $\tau = RC$ im zweiten Beispiel (vgl. S. 93).

⑥ Parallelschaltung von unabhängigen Impedanzen.



In den Verzweigungspunkten A und B können sich keine Ladungen anhäufen. Also ist der zufließende Strom gleich dem wegfließenden Strom. Für die reellen (physikalischen) Ströme gilt also $I = I_1 + I_2$,

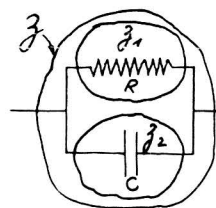
und zwar zu jeder Zeit. Die Phasenverschiebung φ auf der linken Seite der Gleichung ist gleich der Phasenverschiebung für die Summe auf der rechten Seite. Dies ist erfüllt, wenn wir die komplexen Ströme betrachten und schreiben

$Y = Y_1 + Y_2$. Da bei Parallelschaltung an beiden Impedanzen die-
selbe Spannung U liegt, können wir schreiben

$$Y = \frac{U}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} = U \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{U}{Z} \quad \text{wobei} \quad \boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

Bei Parallelschaltung addieren sich die reziproken Impedanzen.

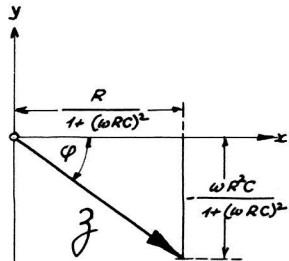
Beispiel: Parallelschaltung eines Ohm'schen Widerstandes R mit einem
Kondensator der Kapazität C .



$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= R \\ Z_2 &= \frac{1}{i\omega C} \end{aligned} \right\} \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C$$

$$Z = \frac{R - i\omega R^2 C}{1 + (\omega R C)^2}$$

$$\tan \varphi = -\omega R C$$



Grenzfälle:

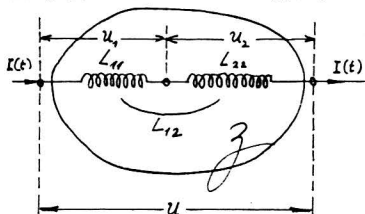
- a) $\omega \gg \frac{1}{RC}$: $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$, $Z \approx \frac{1}{i\omega C}$, verhält sich wie Kondensator
 b) $\omega \ll \frac{1}{RC}$: $\varphi \approx 0$, $Z \approx R$, verhält sich wie Ohm'scher
Widerstand.

⑦ Schaltelemente mit Wechselwirkung

Die oben gefundenen Gesetze für Serie- und Parallelschaltung
gelten nur dann, wenn die Schaltelemente im Sinne der Bem-
erkungen auf S. 186 voneinander unabhängig sind. Wenn sie es nicht
sind, muss man auf die Differentialgleichungen zurückgehen:

Beispiele:

- a) Serienschaltung von zwei Spulen/ deren gegenseitige Induktion
nicht verschwindet:



Nach S. 162 und S. 166 ist

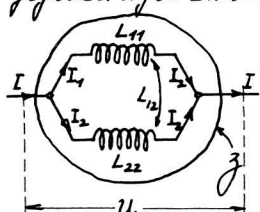
$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -L_{11} \frac{dI}{dt} \mp L_{21} \frac{dI}{dt} \\ U_2 &= -L_{22} \frac{dI}{dt} \mp L_{12} \frac{dI}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{wobei } L_{12} = L_{21}$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn die Spulen so angeordnet sind, dass der Feldfluss der einen Spule den Feldfluss durch die andere Spule hindurch verstärkt, und das negative Vorzeichen, wenn sich die Flüsse gegenseitig schwächen.

$$U_1 + U_2 = U = -(L_{11} + L_{22} \pm 2L_{12}) \frac{dI}{dt} = -L_{\text{eff}} \frac{dI}{dt}$$

Die Schaltung verhält sich wie eine Selbstinduktion. Nach S. 184/185 ist die entsprechende Impedanz $Z = i\omega L_{\text{eff}} = i\omega(L_{11} + L_{22} \pm 2L_{12})$.

b) Parallelschaltung von zwei Spulen mit nicht verschwindender gegenseitiger Induktion:



$$\left. \begin{aligned} U &= -L_{11} \frac{dI_1}{dt} \mp L_{12} \frac{dI_2}{dt} \\ U &= \mp L_{12} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \right\} \text{ wobei } L_{12} = L_{21}$$

Was die Vorzeichen anbelangt, so gilt dasselbe wie im Beispiel a). Elimination von $\frac{dI_2}{dt}$

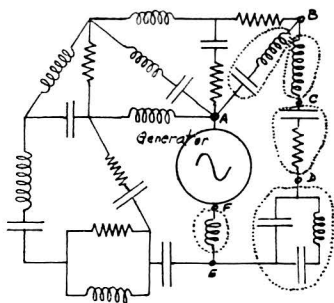
bzw. $\frac{dI_1}{dt}$ führt mit $I = I_1 + I_2$ auf

$$U = -\frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{L_{11} + L_{22} \mp 2L_{12}} \frac{dI}{dt}, \text{ sodass } Z = i\omega \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{L_{11} + L_{22} \mp 2L_{12}}$$

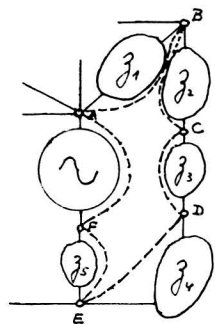
Am Beispiel der übereinandergewickelten Ringspulen (S. 162/163) überzeugt man sich leicht, dass $L_{11}L_{22} \geq L_{12}^2$. (Das Gleichheitszeichen gilt, wenn beide Ringspulen denselben Wicklungsquerschnitt S haben). Man sieht auch sofort, dass $L_{11} + L_{22} \geq 2L_{12}$. (Das Gleichheitszeichen gilt, wenn beide Ringspulen nicht nur den gleichen Wicklungsquerschnitt, sondern auch die gleiche Windungszahl haben). Die obige Impedanz ist also immer positiv imaginär, und im Grenzfall $L_{11}L_{22} = L_{12}^2$ verschwindet sie.

Diese Betrachtungen zeigen, dass man auch wechselwirkende Schaltelemente zu Impedanzen zusammenfassen kann, die ihrerseits die Bedingung der Linearität erfüllen (S. 184), vorausgesetzt dass keine nicht-linearen Materialgesetze hineinspielen.

8) Ströme und Spannungen in Netzwerken unabhängiger Impedanzen.



Wir betrachten in einem komplizierten Netzwerk irgend eine geschlossene Schleife (eine Masche). Ob diese den Generator enthält oder nicht, ist unwesentlich. Ebenso unwesentlich ist es, wie wir die lokalisierten Schaltelemente zu Impedanzen zusammenfassen im Sinne der nebenstehenden Skizze.

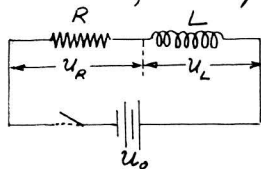


gestrichelt
geschlossener Integrationsweg, der von Klemme zu Klemme führt, gilt also nach dem Induktionsgesetz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ also } \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_1} + \underbrace{\int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_2} + \dots + \underbrace{\int_E^F \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_3} + \underbrace{\int_F^A \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_{\text{gen}}} = 0$$

dieses Ergebnis wird gelegentlich wie folgt ausgesprochen: "Die Summe der Spannungen in einer geschlossenen Masche verschwindet".

Dieser schöne Satz ist nicht narrenreich. Insbesondere enthält er uns nicht der Arbeit, über die Vorzeichen der Spannungen nachzudenken, wie folgendes Beispiel zeigt:



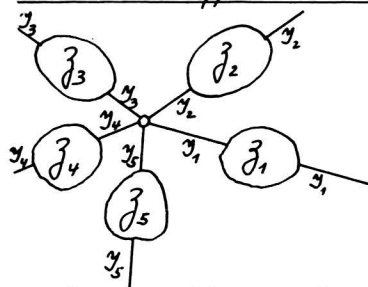
Ein Ohm'scher Widerstand R sei in Serie mit einer Selbstinduktion L an eine Batterie der Spannung U_0 angeschlossen. Blinde Anwendung des obigen Satzes würde

bei den Konventionen, die wir bisher getroffen haben, auf die falsche Differentialgleichung führen, wenn wir die Richtung des

Elektrischen Feldes über den Schaltelementen nicht beachten:

Mit $U_R = RI$, $U_L = -L \frac{dI}{dt}$ und $U_{\text{Batterie}} = U_0$ würde $U_0 + RI - L \frac{dI}{dt} = 0$.
Die richtige Differentialgleichung ist $U_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$ (S. 172).

⑨ Die Kirchhoff'schen Verzweigungsgesetze



Im der Approximation der lokalisierten Impedanzen können sich in einem Verzweigungspunkt keine Ladungen anhäufen. Man kann die Konvention machen, dass die physikalischen Ströme positiv zählen, wenn sie auf den Verzweigungspunkt zufließen. Ihre algebraische Summe muss dann verschwinden, und zwar in jedem Moment. Damit gilt auch für die komplexen Ströme $\sum_i \mathcal{I}_i = 0$.

9.2. Der Bereich der Anwendbarkeit der komplexen Schreibweise

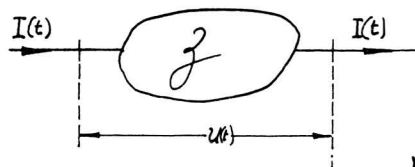
Der Formalismus der komplexen Impedanzen, den wir im Abschnitt 9.1. eingeführt haben, ist in seiner Anwendbarkeit sehr beschränkt:

① Er liefert uns nur den eingeschwungenen ("stationären") Zustand: Wenn wir schreiben $U = U_0 e^{i\omega t}$ und $\mathcal{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$, so impliziert dies, dass die Schwingung von unendlich langer Zeit eingeschaltet wurde. Zur Berechnung von Ein- und Ausschaltvorgängen ist die Differentialgleichung zu lösen.

② Der Formalismus setzt lineare Schaltelemente voraus (S. 184)

③ Lineare Schaltelemente mit linearer Wechselwirkung können zu linearen Impedanzen zusammengefasst und als solche in den Formalismus eingesetzt werden.

9.3. Die Leistung eines Wechselstroms



Wenn ein Wechselstrom durch ein Schaltelement mit der Impedanz Z fließt, ändert sich die elektrische Arbeit

$\frac{U(t) \cdot I(t) dt}{\text{Potentialdiff. Ladung}}$; die in einem infinitesimalen Zeitelement dt am Schaltelement geleistet wird, von Augenblick zu Augenblick. In reeller Schreibweise gilt für lineare Schaltelemente

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{und} \quad U(t) = U_0 \cos \omega t$$

Die momentane Leistung ist also

$$N(t) = U(t) I(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi)$$

Goniometrische Umformung führt auf

$$N(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \{ \cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi \}$$

Die momentane Leistung oszilliert mit der Frequenz 2ω . Während eines Teils der Periode kann sie sogar negative Werte annehmen, nämlich immer dann, wenn das Schaltelement Leistung an das Netzwerk oder an den Generator abgibt.

Von Interesse ist auch die über die Zeit gemittelte Leistung

$$\bar{N} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

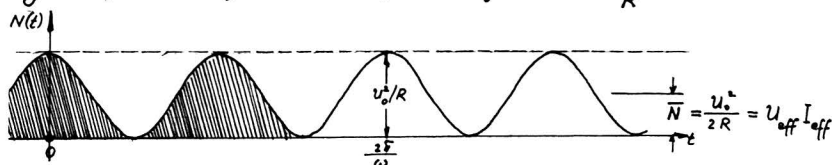
Mit den auf S. 182/183 eingeführten effektiven Größen wird

$$\boxed{\bar{N} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi}$$

Beispiele

① Der Ohm'sche Widerstand R :

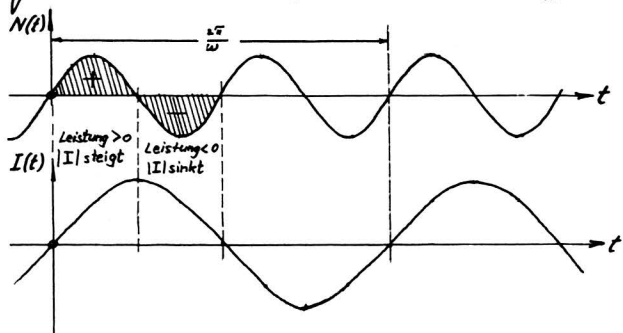
$$Z = R, \quad \varphi = 0, \quad N(t) = U_0 \cos \omega t I_0 \cos \omega t = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t \quad (\text{S. 183})$$



die momentane Leistung ist beim Ohm'schen Widerstand nie negativ, denn die Joule'sche Wärme wird durch ihn nicht zurückverwandelt in elektrische Energie (dazu wäre eine besondere Maschine notwendig; und eine solche hätte aus fundamentalen Gründen einen Wirkungsgrad unter 100%).

② Die Selbstinduktion L .

$$\vec{Z} = i\omega L, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad N(t) = U_0 \cos \omega t \quad \frac{U_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_0}{\omega L} \sin 2\omega t$$



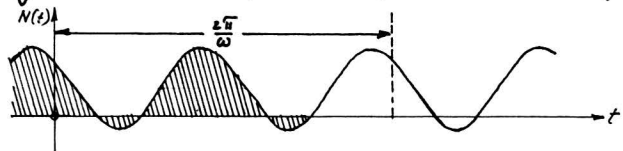
$$\overline{N} = 0$$

Wenn der Betrag der Stromstärke steigt, wird Energie in das Feld \vec{B} der Selbstinduktion hineingesteckt, und

die momentane Leistung ist positiv. Wenn der Betrag der Stromstärke sinkt, wird das Feld \vec{B} wieder abgebaut, und Energie wird an das Netzwerk bzw. an den Generator zurückgegeben. Die mittlere Leistung verschwindet. ("Nuttloser" Strom, "Blindleistung").

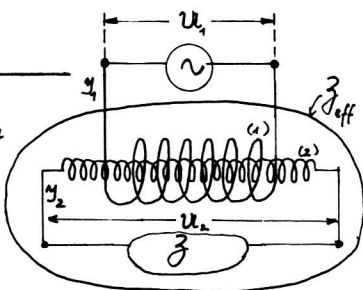
③ Serienschaltung von Ohm'schem Widerstand R und Kapazität C

$$\vec{Z} = R + \frac{1}{i\omega C}, \quad \tan \varphi = -\frac{1}{\omega RC}, \quad N(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \{ \cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi \}$$



9.4. Der Transformator

Zwei Spulen (1) und (2), die einzeln die Selbstinduktion L_{11} bzw. L_{22} haben, sind "gekoppelt" durch die gegenseitige Induktion L_{12} . Die Spule (1) ist an

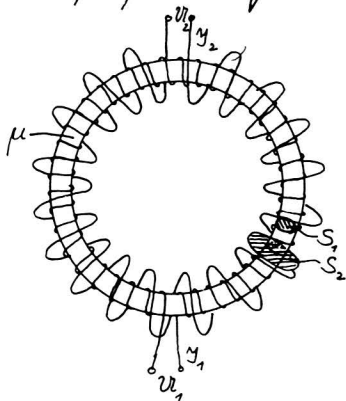


im Wechselstromgenerator angeschlossen, und an ihren Klemmen werde die komplexe Spannung U_1 gemessen. An die Spule (2) ist eine Impedanz Z angeschlossen, und an ihren Klemmen werde die komplexe Spannung U_2 gemessen.

Aufgabe: Man suche die Beziehungen zwischen den Grössen U_1 (Primärspannung), U_2 (Sekundärspannung), I_1 (Primärstrom), I_2 (Sekundärstrom) und berechne die effektive Impedanz Z_{eff} , die am Generator liegt.

Die Kopplung der beiden Spulen: Aus der Behandlung der übereinandergewickelten Ringspulen auf S. 162/163 geht hervor, dass $L_{11}L_{22} \geq L_{12}^2$. Dies gilt ganz allgemein, wie man mit der auf S. 163/164 skizzierten Methode leicht zeigen kann. Der Grenzfall $L_{11}L_{22} = L_{12}^2$ wird als vollkommene Kopplung bezeichnet.

Bei den Ringspulen wäre er realisiert, wenn die Ringquerschnitte S_1 und S_2 identisch wären. Ganz allgemein ist die Kopplung vollkommen, wenn der gesamte von der Spule (1) erzeugte Fluss durch die gesamte Windungsfläche der Spule (2) hindurchtritt und umgekehrt. Vollkommene Kopplung lässt sich annähernd auch bei $S_1 \neq S_2$ realisieren durch Verwendung eines Ringkerns sehr hoher Permeabilität μ in der inneren Spule. Nach S. 168 ist die Feldstärke im Ring gegeben durch $B = \mu\mu_0 \frac{NI}{\ell}$. Bei $\mu \gg 1$ verläuft fast der ganze Fluss im Inneren des Kerns. Als Bei-



spiel nehmen wir an, dass die innere Spule vollständig vom hochpermeablen Material gefüllt sei, während der Raum zwischen den Spulen leer sei. Nach S. 168 und 163 ist dann

$$L_{11} = \mu\mu_0 \frac{S_1 N_1^2}{\ell} \quad \text{und}$$

$$L_{22} = \mu_0 \left\{ \frac{(S_2 - S_1) N_2^2}{\ell} + \mu \frac{S_1 N_2^2}{\ell} \right\} \quad \text{und}$$

$$L_{12} = \mu\mu_0 \frac{S_1 N_1 N_2}{\ell}$$

Für $\mu \gg 1$ kann das erste Glied im Ausdruck für L_{22} vernachlässigt werden, sodass näherungsweise $L_{11} L_{22} = L_{12}^2$ und $\frac{L_{11}}{L_{12}} = \frac{N_1}{N_2}$. Bei einem technischen Netzttransformator mit Eisenkern ist die vollkommene Kopplung etwa auf diese Weise realisiert. (Es gibt Transformatoren, bei denen man auf vollkommene Kopplung absichtlich verzichtet. Wir beschränken uns hier auf den Fall vollkommener Kopplung).

das Verhältnis von Primär- zu Sekundärspannung.

Für die Spannungen an den Spulen schreiben wir

$$\left. \begin{aligned} U_1(t) &= -L_{11} \frac{dI_1}{dt} - L_{21} \frac{dI_2}{dt} \\ U_2(t) &= -L_{22} \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt} \end{aligned} \right\} \text{ woraus durch Elimination von } I_1(t)$$

$$(L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}) \frac{dI_2}{dt} = L_{12} U_1 - L_{11} U_2$$

Wegen der Annahme vollkommener Kopplung ($\mu \gg 1$) verschwindet die linke Seite, und wir haben

$$\frac{U_1(t)}{U_2(t)} = \frac{L_{11}}{L_{12}} = \frac{N_1}{N_2}$$

Da das Verhältnis zeitunabhängig ist, sind $U_1(t)$ und $U_2(t)$ in Phase.

Die Impedanz Z_{eff} , die der Generator "sieht".

Wir gehen zur komplexen Schreibweise über. Die Ableitung von komplexen Strömen nach der Zeit hat einen Sinn, da der Realteil der zeitlichen Ableitung eines komplexen Stromes gleich der zeitlichen Ableitung des entsprechenden reellen Stromes ist:

$$y = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad \frac{dy}{dt} = i\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad \frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \omega I_0 \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Die obige Differentialgleichung für $U_1(t)$ lautet in komplexer Schreibweise

$$U_1 = -i\omega L_{11} I_1 - i\omega L_{21} I_2$$

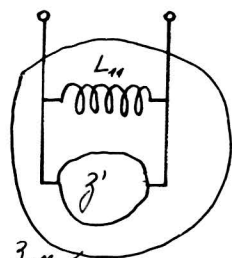
Wir wollen $Z_{\text{eff}} = \frac{U_1}{I_1}$ berechnen und setzen deshalb

$$I_2 = \frac{U_2}{Z} = \frac{L_{12}}{L_{11}} \cdot \frac{U_1}{Z}, \quad \text{womit } U_1 = -i\omega L_{11} I_1 - i\omega L_{21} \frac{L_{12}}{L_{11}} \frac{U_1}{Z}$$

sodass schliesslich

$$\frac{1}{Z_{\text{eff}}} = \frac{I_1}{U_1} = \frac{L_{12}^2}{L_{11}^2} \cdot \frac{1}{Z} + \frac{1}{i\omega L_{11}} = \frac{1}{Z'} + \frac{1}{i\omega L_{11}}$$

Dies lässt sich interpretieren als Parallelschaltung einer Selbstinduktion L_{11} mit einer Impedanz $Z' = \frac{L_{11}^2}{L_{12}^2} Z = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$. Damit haben wir eine Ersatzschaltung für den mit der Impedanz Z belasteten Transformator gefunden.



Das Verhältnis vom Primärstrom I_1 zum Sekundärstrom I_2 wird:

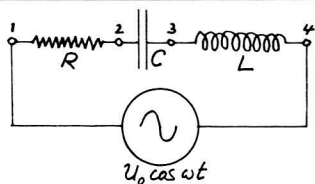
$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_2} &= \frac{U_1}{Z_{\text{eff}}} \cdot \frac{U_2}{Z} = \frac{U_1}{U_2} \left(\frac{1}{Z'} + \frac{1}{i\omega L_{11}} \right) Z \\ &= \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{Z}{Z'} + \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{Z}{i\omega L_{11}} = \frac{N_2}{N_1} + \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{Z}{i\omega L_{11}} \end{aligned}$$

Bei einem voll belasteten technischen Transformator mit Eisenkern ist im allgemeinen $\omega L_{11} \gg Z$, also $\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{N_2}{N_1}$.

Beachte, dass wir hier vollkommene Kopplung vorausgesetzt haben. Die Beziehungen gelten nicht für zwei beliebige Spulen L_{11} und L_{22} !

9.5. Resonanz und Schwingkreise

9.5.1. Serie-Resonanzkreis im eingeschwungenen Zustand



Ein Ohm'scher Widerstand R , eine Kapazität C und eine Selbstinduktion L seien in Serie geschaltet und an einen idealen Wechselspannungsgenerator mit

der Spannung $U_0 \cos \omega t$ angeschlossen. Nach einiger Zeit stellt sich ein Zustand ein, in welchem der Strom $I(t)$ eine harmonische Schwingung $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ mit konstanter Amplitude $I_0(\omega)$ ausführt. Wir nennen diesen Zustand hier den eingeschwungenen Zustand.

a) Behandlung des Problems in reeller Schreibweise.

Wir schreiben zuerst die Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ auf: Die Spannung über dem Ohm'schen Widerstand beträgt $RI(t)$, und die Spannung am Kondensator $\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt$. Die Summe dieser Spannungen ist nicht gleich der Generatorspannung, da z.B. bei steigendem Strom in der Selbstinduktion eine Spannung induziert wird, die der Generatorspannung entgegenwirkt (vgl. S. 192). Es ist also

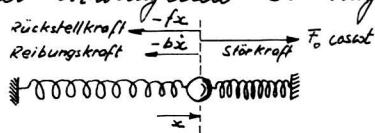
$$RI + \frac{1}{C} \int I dt = U_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt}$$

umgeordnet, durch L dividiert und nach t abgeleitet:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = - \underbrace{\frac{\omega U_0}{L} \sin \omega t}_{\frac{\omega U_0}{L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

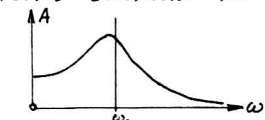
Eine ähnliche Differentialgleichung haben wir schon in

der Mechanik angetroffen (Physik I, S. 183) bei der Behandlung der erzwungenen Schwingung, nämlich

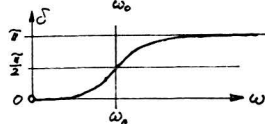


$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad \text{wobei} \\ \omega_0^2 = k/m \quad \text{und} \quad 2\beta = b/m$$

Die Lösung für den eingeschwungenen (wir sagten damals "stationären") Zustand war von der Form $x(t) = A \cos(\omega t - \delta)$ mit



$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \text{und}$$



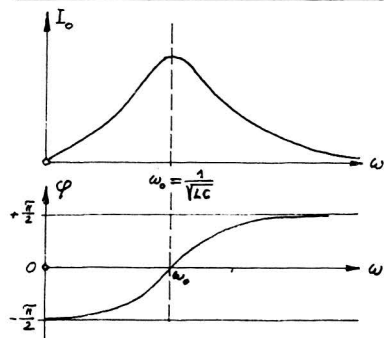
$$\tan \delta = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Zur Übertragung dieser Lösung auf den elektrischen Schwingkreis muss man wie folgt ersetzen:

$$A \rightarrow I_0, \quad \delta \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{also } \tan \delta = -\frac{1}{\tan \varphi}), \quad 2\beta \rightarrow \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 \rightarrow \frac{1}{LC}, \quad \frac{F_0}{m} \rightarrow \frac{\omega U_0}{L}$$

$$I_0 = \frac{\omega U_0}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R\omega}{L})^2}} \quad \tan(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2}, \quad \text{umgeformt}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}} \quad \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



Die Resonanzfrequenz ω_0 kann durch das Maximum der Stromamplitude oder durch das Verschwinden der Phasenverschiebung φ definiert werden. Beide Definitionen führen auf die Gleichung

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \quad \text{also}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Formel von J.J. Thomson (1856 - 1940).

Man kann sich darüber streiten, ob die Analogie mit der erzwungenen Schwingung des mechanischen Systems tiefgründig sei. Sind zwei verschiedene physikalische Probleme, die auf die

selbe Differentialgleichung führen, auch naturwissenschaftlich eng verwandt?
Sicher nicht immer!

Die Kurven auf S. 199 zeigen, dass zwischen dem Verhalten des mechanischen und des elektrischen Systems ein Unterschied besteht: Beim elektrischen Oszillator liegt das Maximum der Amplitude bei derselben Frequenz wie der Phasensprung, während beim mechanischen Oszillator eine Frequenzverschiebung besteht. Ferner verschwindet die Amplitude der Schwingung beim elektrischen Oszillator bei der Frequenz $\omega=0$, während sie beim mechanischen Oszillator endlich ist.

Das Verhalten des RCL-Kreises bei verschiedenen Frequenzen

a) Tiefe Frequenzen: $\omega \ll \omega_0$ und $\omega \ll \frac{1}{RC}$

$$\left. \begin{array}{l} I_0 \approx U_0 \omega C \\ \varphi \approx -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} I(t) \approx U_0 \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Schaltung verhält sich annähernd wie ein Kondensator der Kapazität C (S. 185).

b) Hohe Frequenzen: $\omega \gg \omega_0$ und $\omega \gg \frac{R}{L}$

$$\left. \begin{array}{l} I_0 \approx \frac{U_0}{\omega L} \\ \varphi \approx \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} I(t) \approx \frac{U_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Schaltung verhält sich annähernd wie eine Selbstinduktion L (S. 184/185).

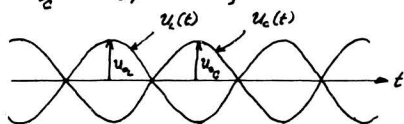
c) Der Fall der Resonanz: $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\left. \begin{array}{l} I_0 = \frac{U_0}{R} \\ \varphi = 0 \end{array} \right\} I(t) = \frac{U_0}{R} \cos \omega t$$

Die Schaltung verhält sich genau wie ein Ohm'scher Widerstand R . Derselbe Strom würde fließen, wenn man zwischen den Klemmen 2 und 4 (Skizze S. 198) einen Kurzschluss anbringen würde. Tatsächlich zeigt ein

Voltmeter zwischen den Klemmen 2 und 4 keine Spannung an im Resonanzfall, obwohl ein maximaler Strom fließt. Dies ist leicht einzusehen: Der Strom in den Zuleitungen zu C ist jederzeit gleich dem Strom durch L; denn diese beiden Impedanzen sind in Serie geschaltet. Da die Ströme in Phase sein müssen, sind die Spannungen nach S. 185 nicht in Phase, und zwar ist die Spannung über C um π verschoben gegen die Spannung über L. Ferner kann man leicht einsehen, dass die Spannungsausplituden über C und über L bei Resonanz gleich sind:

$$\left. \begin{aligned} U_L &= I_0 \omega L \\ U_C &= I_0 / \omega C \end{aligned} \right\} \text{Bei Resonanz ist } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \text{ also } U_L = U_C$$



In jedem Augenblick sind $U_L(t)$ und $U_C(t)$ entgegengesetzt gleich.

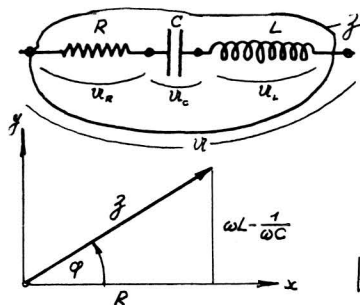
Die Resonanzüberhöhung:

Bei $\omega = \omega_0$ misst man zwischen den Klemmen 2 und 3 dieselbe Spannungsausplitude wie zwischen den Klemmen 3 und 4. Sie beträgt $U_L = U_C = I_0 \omega_0 L$, wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$, sodass

$U_L = U_C = \frac{\omega_0 L}{R} U_0$. Bei einem kleinen Ohm'schen Widerstand R kann $U_L = U_C$ grösser werden als die Spannungsausplitude des Generators. Der Zahlfaktor $\frac{\omega_0 L}{R}$ wird Resonanzüberhöhung genannt. (Demonstrationen).

b.) Berechnung des RCL-Kreises mit Hilfe der komplexen Impedanzen.

Der Strom im RCL-Kreis im eingeschwungenen Zustand lässt sich sofort hinschreiben, wenn man die komplexen Impedanzen benutzt. Man muss dann gar keine Differentialgleichung lösen:



$$U = U_R + U_C + U_L = Y \left(R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right)$$

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Scheinwiderstand:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stromamplitude: } I_0 = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \text{Phase: } \quad \quad \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Übereinstimmend mit} \\ \text{S. 199} \end{array}$$

Die elektrische und die magnetische Energie des Systems bei Resonanz.

die in der Selbstinduktion gespeicherte Energie (die Energie des magnetischen Feldes) beträgt nach S. 174 $W_L = \frac{1}{2} L I^2$. Bei Resonanz ist $I_0 = \frac{U_0}{R}$ und $\varphi = 0$; also $I(t) = \frac{U_0}{R} \cos \omega_0 t$ und $W_L = \frac{L}{2R^2} U_0^2 \cos^2 \omega_0 t$.

Die im Kondensator gespeicherte Energie (die Energie des elektrischen Feldes) beträgt nach S. 45 und 61 $W_C = \frac{1}{2} C U_C^2$. In der komplexen Schreibweise ist $U_C = Z_C Y = \frac{1}{i\omega C} Y$. Bei Resonanz verhält sich die Serieschaltung wie ein Ohm'scher Widerstand, sodass $Y = \frac{U}{R}$. Damit ist

$$U_C = \frac{U}{i\omega_0 RC} = \frac{U_0 e^{i\omega_0 t}}{\omega_0 RC} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{U_0 e^{i(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}}{\omega_0 RC}$$

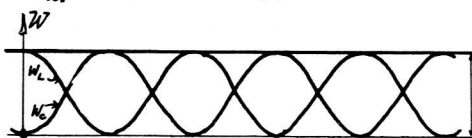
Die physikalische Spannung ist der Realteil

$$U_C = \frac{U_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}{\omega_0 RC} = \frac{U_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0 RC} \quad \text{Damit wird}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \frac{U_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{(\omega_0 RC)^2} \quad \text{Mit } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ haben wir dann}$$

$$W_C = \frac{L}{2R^2} U_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$W_{\text{tot}} = W_L + W_C = \frac{L^2}{2R^2} U_0^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \frac{L^2}{2R^2} U_0^2$$



Die totale gespeicherte Energie ist zeitunabhängig. Sie pendelt sozusagen zwischen magnetischen und elektrischer Energie hin- und her. Die Leistung, die vom Ge-

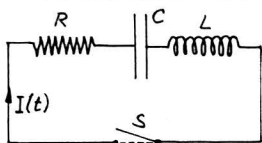
nerator in die RCL-Serienschaltung im eingeschwungenen Zustand hineingesteckt wird, wird in jedem Augenblick im Widerstand R in Joule'sche Wärme verwandelt.

Es besteht eine gewisse Analogie zur Schwingung des mechanischen Oszillators der Mechanik, wo die Energie zwischen kinetischer und potentieller Energie hin- und herpendelt.

Idealisierung und Realität :

Wir haben so gerechnet, als ob es lokalisierte reine Ohm'sche Widerstände, reine Kapazitäten und reine Selbstinduktionen gäbe. Dies ist eine Idealisierung. Jeder physikalisch realisierbare Widerstand hat eine Selbstinduktion und eine Kapazität; jeder realisierbare Kondensator hat einen Widerstand (sei es wegen den Platten, deren Zuleitungen oder wegen dem nicht-idealen Dielektrikum); jede realisierbare Selbstinduktion hat eine Kapazität, einen nicht-verschwindenden Widerstand (wenn wir Supraleiter ausschliessen) und einen nicht-idealen Magnetkern (z.B. einen Kern mit einer Hysterese, vgl. S. 142). Alle diese Effekte führen zu Abweichungen vom hier berechneten, idealen Verhalten. Bei Experimenten mit tiefen Frequenzen, z.B. 50 Hz, ist meistens die Selbstinduktion für die Abweichungen vom Resultat der idealisierten Rechnung verantwortlich, und zwar wegen dem Widerstand der Wicklung und wegen dem Hysteresisverhalten eines allfälligen Eisenkerns, das sich ähnlich wie ein Widerstand auswirkt. Ferner ist die Wechselspannung unseres Kraftnetzes nicht genau eine \cos -Schwingung. Bei hohen Frequenzen sind es vor allem die "ungewollten" Kapazitäten und Selbstinduktionen, die berücksichtigt werden sollten.

9.5.2. Der frei schwingende RCL-Seriekreis.



Der Kondensator sei auf die Spannung U_0 aufgeladen. Zur Zeit $t=0$ wird der Schalter S geschlossen, sodass ein Strom zu fließen beginnt in der eingezeichneten Richtung. Wegen der Selbstinduktion hat der Strom die Tendenz weiter zu fließen, auch wenn sich der Kondensator entladen hat. Es wäre durchaus möglich, dass eine Schwingung entsteht. Wenn man sich die Vorzeichen richtig überlegt (was gar nicht so trivial ist) gelangt man auf folgende Differentialgleichung:

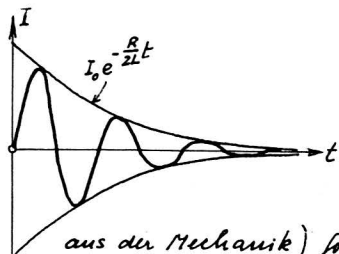
Ein stationärer Zustand kann nicht eintreten, da kein Generator vorhanden ist, der die im Widerstand R irreversibel in Wärme umgewandelte Energie dem System wieder zuführt. Die Methode der komplexen Impedanzen versagt, und man muss die Differentialgleichung lösen. Eine ganz analoge Differentialgleichung wurde in der Mechanik (Physik I, S. 178/179) gelöst, allerdings für andere Anfangsbedingungen. Auch hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\underbrace{RI}_{u_R} + \underbrace{\frac{Q}{C}}_{u_C} + \underbrace{L \frac{dI}{dt}}_{u_L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Ein stationärer Zustand kann nicht eintreten, da kein Generator vorhanden ist, der die im Widerstand R irreversibel in Wärme umgewandelte Energie dem System wieder zuführt. Die Methode der komplexen Impedanzen versagt, und man muss die Differentialgleichung lösen. Eine ganz analoge Differentialgleichung wurde in der Mechanik (Physik I, S. 178/179) gelöst, allerdings für andere Anfangsbedingungen. Auch hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \begin{cases} < 0 \text{ schwache Dämpfung:} & \text{oszillatorische Lösung} \\ = 0 \text{ kritische Dämpfung} & \\ > 0 \text{ überkritische Dämpfung} & \end{cases} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Strom fließt immer in der} \\ \text{selben Richtung.} \end{matrix}$$

Wir betrachten nur den Fall der schwachen Dämpfung:



Die Selbstinduktion verbietet einen sprunghaften Anstieg des Stromes beim Einschalten (vgl. S. 172). Für die angenommenen Anfangsbedingungen wird man (nach Konsultation des entsprechenden Problems

aus der Mechanik) folgende Lösung hinschreiben:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \Omega t \quad \text{wobei} \quad \Omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung überzeugt man sich leicht, dass dies eine Lösung ist. Die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ist trivialerweise erfüllt. Bei $t = 0$ muss aber noch eine zweite Bedingung gelten: Wegen $I(0) = 0$ ist bei $t = 0$ die Spannung am Widerstand R null, sodass die ganze Spannung U_0 des Kondensators an der Selbstinduktion liegt: $L \frac{dI}{dt} \Big|_{t=0} = U_0$. Daraus folgt $I_0 = \frac{U_0}{\omega_0 L}$.

9.5.3. Der Q-Faktor des RCL-Seriekreises

Im Falle der schwachen Dämpfung kann man dem RCL-Seriekreis einen "Q-Faktor" zuschreiben, ähnlich wie einem mechanischen Oszillator (Physik I, S. 180). Wir geben hier vier Definitionen des Q-Faktors, die alle auf dieselbe Zahl Q führen. Bei den ersten drei Definitionen betrachten wir einen RCL-Kreis, der an einen idealen Wechselspannungsgenerator angeschlossen und vollkommen eingeschwingen ist.

- ① Q ist gleich der Resonanzüberhöhung (S. 201): $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$
- ② $Q = \frac{\text{in } L \text{ und } C \text{ bei Resonanz gespeicherte Energie}}{\text{in } R \text{ in der Zeitspanne } 1/\omega_0 \text{ im Mittel verheizte Energie.}}$

Der Zähler beträgt nach S. 202 $\bar{W}_L + \bar{W}_C = \frac{L}{2R^2} U_0^2$. Die in R verheizte Leistung ist RI^2 (S. 84). In einer Periode, d.h. in der Zeit $2\pi/\omega_0$ wird folgende elektrische Energie verheizt bei $\omega = \omega_0$ (S. 199):

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} RI^2 dt = R \left(\frac{U_0}{R} \right)^2 \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{\pi U_0^2}{\omega_0 R}$$

Auf die Zeitspanne $1/\omega_0$ entfällt also im Mittel die Energie $\bar{W} = \frac{U_0^2}{2\omega_0 R}$. Damit wird $Q = \frac{\bar{W}_L + \bar{W}_C}{\bar{W}_R} = \frac{\omega_0 L}{R}$.

- ③ Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Q-Faktor und der Breite $\Delta\omega$ der Resonanzkurve (Physik I, S. 187/188):

$$Q = \frac{\text{Resonanzfrequenz}}{\text{Breite der Resonanzkurve}}$$

Für $\Delta\omega \ll \omega_0$ erhält man $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ (bei geeigneter Definition der Breite $\Delta\omega$).

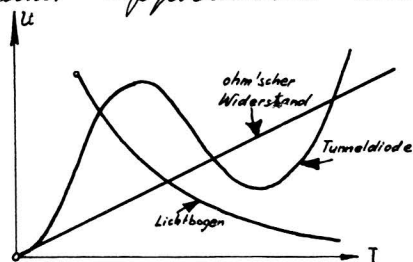
- ④ $Q = \omega_0 \tau$, wobei τ die Abklingzeit der elektromagnetischen Energie des

frei schwingenden RCL-Kreises bedeutet. Diese Energie pendelt zwischen der Spule und dem Kondensator hin- und her. Die Energie in der Spule ist $\frac{1}{2}LI^2$ (S.174). Nach S.204 ist sie also prop. $e^{-\frac{R}{L}t}$. In der Zeit $\tau = \frac{L}{R}$ sinkt sie auf den e -ten Teil. Es ist damit $Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 L}{R}$ in Übereinstimmung mit den anderen Definitionen

9.5.4. Die Erzeugung von ungedämpften Schwingungen.

a. Entdämpfung durch negative Widerstände.

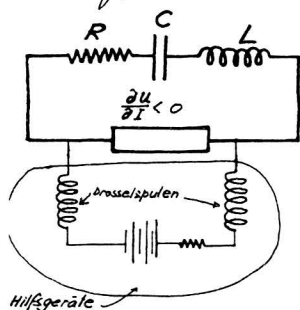
Wechselströme hoher Frequenz, wie sie z.B. in der Nachrichtentechnik verwendet werden, können nicht mehr durch rotierende Schleifen (etwa nach S.181) erzeugt werden. Man verwendet Schwingkreise, die durch geeignete aktive Schaltelemente "entdämpft" werden. Die Differentialgleichung des frei schwingenden RCL-Kreises (S.204) zeigt, dass durch Einfügen eines "negativen Widerstandes" in den RCL-Kreis die Dämpfung aufgehoben oder gar negativ gemacht werden könnte, was zu einer anschwellenden Schwingung führen würde. Wir werden unten zeigen, dass es genügt, wenn das eingefügte Schaltelement einen negativen differentiellen Widerstand, eine sog. fallende Charakteristik hat, d.h. wenn $\frac{\partial U}{\partial I}$ negativ ist. Das erste in der Hochfrequenztechnik verwendete Schaltelement mit fallender Charakteristik war ein Lichtbogen, der zwischen Kohleelektroden oder zwischen einer Kohle- und einer Kupferelektrode brannte. Die fallende Charakteristik



rührt davon her, dass mit steigendem Strom die Anzahl der Ladungsträger zunimmt. Der Lichtbogen hat heute nur noch historische Bedeutung. Die moderne Festkörperphysik

hat zur Entwicklung von Widerständen mit fallender Charakteristik geführt, die auf dem quantenmechanischen Tunneleffekt ("Tunnel-diode") oder auf der Vervielfachung der Ladungsträger durch den Leitungsmechanismus beruhen. Frequenzen bis zu 10^{14} sec^{-1} sind auf diese Weise erzeugt worden.

Widerständen mit fallender Charakteristik muss dauernd elektrische Energie zugeführt werden, um die fallende Charakteristik aufrecht zu erhalten, d.h. ausserhalb des Schwingkreises sind noch Hilfegeräte notwendig, eine Batterie als Energielieferant und Drosselspulen (Selbstinduktionen) zur Verhinderung des Überflüssens des hochfrequenten Stromes vom Schwingkreis auf die Hilfegeräte.



Analyse der Schaltung:

Wir berechnen die Spannung, welche am "negativen" Widerstand liegt, mit U_n . Die Differentialgleichung des Schwingkreises ist dann nach S. 204

$$L \frac{dI}{dt} + RI + U_n + \frac{Q}{C} = 0, \quad \text{abgeleitet nach } t:$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{dU_n}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad \text{Mit } \frac{dU_n}{dt} = \left. \frac{\partial U_n}{\partial I} \right|_I \cdot \frac{dI}{dt} \text{ wird}$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \left(R + \frac{\partial U_n}{\partial I} \right) \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

Die Lösungen wurden auf S. 204 diskutiert. Hier ist nur die oszillatorische Lösung von Interesse. Bei irgendwelchen Anfangsbedingungen ist

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{2L} \left(R + \frac{\partial U_n}{\partial I} \right) t} \cdot \sin(\Omega t - \delta) \quad \text{mit } \Omega^2 = \frac{1}{LC} - \left\{ \frac{1}{2L} \left(R + \frac{\partial U_n}{\partial I} \right) \right\}^2$$

Wenn $\left(R + \frac{\partial U_n}{\partial I} \right) < 0$, dann schaukeln sich die Schwingungen auf. Die Amplitude kann aber nicht beliebig anschwellen, da die Charakteristik nur über einen beschränkten Strombereich

genügend negativ ist. Der "Arbeitspunkt" stellt sich so ein, dass $(R + \frac{\partial U_0}{\partial I}) = 0$. Es resultiert eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. (Demonstrationen mit dem historischen Lichtbogensender von Poulsen)

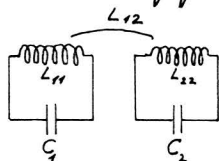
6. Rückkopplung.

Auch mit Hilfe von Rückkopplungsschaltungen unter Benützung von Transistoren und Elektronenröhren können Schwingkreise entdämpft werden. Viele Rückkopplungsschaltungen können formell als negative Widerstände interpretiert werden. (Vgl. Physik I, S. 191/192).

9.5.5. Gekoppelte Schwingkreise.

Ein Schwingkreis verhält sich (bei $R=0$) wie ein harmonischer Oszillator (S. 204). Anstelle der Bewegungskordinate x beim mechanischen Oszillator tritt der Strom I . Ähnlich wie man mechanische Oszillatoren zu linearen Schwingssystemen koppeln kann, kann man auch Schwingkreise zu linearen Schwingssystemen koppeln. In der Mechanik nannten wir ein System von gekoppelten Oszillatoren linear, wenn die potentielle Energie eine quadratische Form der Bewegungskordinaten war (Physik I, S. 193 - 205).

Zwei LC-Kreise lassen sich auf einfache Weise koppeln durch die gegenseitige Induktion der beiden Spulen:



Diese Kopplung ist nicht das vollkommene Analogon der Kopplung mechanischer Oszillatoren durch eine Feder; aber sie ist linear, und das ist das Wesentliche. Man sieht sofort ein, dass es sich hier um ein lineares Schwingssystem handelt, wenn man die magnetische Energie hinschreibt. Nach S. 177 beträgt sie

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2$$

Dies ist eine quadratische Form der Ströme (die nun die Rolle der Bewegungskordinaten spielen). Im Übrigen ist es reine Geschmackssache, ob man die elektrische oder die magnetische Energie als Analogon der potentiellen Energie betrachtet.

Berechnung der Eigenfrequenzen bei induktiver Kopplung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{erster Kreis: } L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{21} \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} = 0 \quad \text{wobei } I_1 = \frac{dQ_1}{dt} \\ \text{zweiter Kreis: } L_{12} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C_2} = 0 \quad \text{wobei } I_2 = \frac{dQ_2}{dt} \end{array} \right\} \text{ also}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{11} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_{21} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{1}{C_1} I_1 = 0 \\ L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_{22} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} I_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ dieses Gleichungssystem ist nicht analog zu demjenigen}$$

der gekoppelten Pendel (Physik I, S.195/196). Da die Kopplung linear ist, vermuten wir aber, dass auch hier Normalschwingungen auftreten. Wir machen deshalb denselben Ansatz:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = A e^{i\omega t} \\ I_2 = B e^{i\omega t} \end{array} \right\} \text{ durch Einsetzen in das Gleichungssystem wird dann}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \left(-\omega^2 L_{11} + \frac{1}{C_1} \right) - B L_{21} \omega^2 = 0 \\ -A \omega^2 L_{12} + B \left(-\omega^2 L_{22} + \frac{1}{C_2} \right) = 0 \end{array} \right\} \text{ dies ist ein System linearer, homogener Gleichungen für die Stromamplituden } A \text{ und } B. \text{ Damit eine nicht-triviale Lösung existiert, muss die Determinante verschwinden. Man erhält damit die Sekulargleichung}$$

$$(L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}) \omega^4 - \left(\frac{L_{11}}{C_2} + \frac{L_{22}}{C_1} \right) \omega^2 + \frac{1}{C_1 C_2} = 0$$

Dabei gilt nach S.162 $L_{12} = L_{21}$, und nach S.163 kann man schliessen, dass $L_{11} L_{22} \geq L_{12}^2$. Wir sehen zunächst vom Spezialfall der vollkommenen Kopplung $L_{11} L_{22} = L_{12}^2$ ab (vgl. S.195). Die obige quadratische Gleichung für ω^2 hat eine positive Diskriminante und damit zwei reelle Wurzeln. Wegen $L_{11} L_{22} \geq L_{12}^2$ sind die Wurzeln zudem positiv, sodass ω reell ist, d.h. beide Lösungen sind oszillierend: Das System hat zwei Eigenfrequenzen.

Gekoppelte gleiche Schwingkreise:

Es sei $L_{11} = L_{22} = L$ und $C_1 = C_2 = C$. Es ist dann

$$(L^2 - L_{12}^2) \omega^4 - \frac{2L}{C} \omega^2 + \frac{1}{C^2} = 0, \text{ also}$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{2L}{C} \pm \sqrt{\left(\frac{2L}{C}\right)^2 - \frac{4(L^2 - L_{12}^2)}{C^2}}}{2(L^2 - L_{12}^2)} = \frac{\frac{2L}{C} \pm \frac{2L_{12}}{C}}{2(L^2 - L_{12}^2)}$$

diese Formel lässt sich stark vereinfachen, wenn die Kopplung schwach ist, d.h. wenn $L^2 \gg L_{12}^2$. Es ist dann

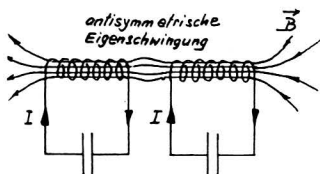
$\omega^2 \approx \frac{1}{LC} \pm \frac{L_{12}}{L^2 C}$. Führt man die Eigenfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ der ungekoppelten Kreise ein, so wird

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{L_{12}}{L}\right) \quad \text{und} \quad \boxed{\omega \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{L_{12}}{2L}\right)}$$

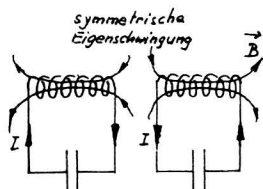
Durch die Kopplung wird die Eigenfrequenz ω_0 "aufgespalten". Die Aufspaltung ist in erster Näherung proportional zum Kopplungskoeffizienten L_{12} . Dieses Phänomen hat in vielen Gebieten der Physik eine grosse Bedeutung.

Die Eigenschwingungen.

Jeder Eigenfrequenz entspricht eine Eigenschwingung des Systems. Bei allgemeinen Anfangsbedingungen sind alle Eigenschwingungen angeregt. Bei zwei gleichen gekoppelten LC-Kreisen ist es naheliegend, in Analogie zum Fall der gleichen gekoppelten Pendel eine symmetrische und eine antisymmetrische Eigenschwingung zu postulieren. Was wir als "symmetrische" und was als "antisymmetrische" Eigenschwingung bezeichnen wollen, ist zunächst nicht so klar wie bei den gekoppelten Pendeln. Damit die beiden LC-Kreise aber wirklich gleich sind, müssen die Spulen im gleichen Schraubensinne gewickelt sein. In der antisymmetrischen Eigenschwingung werden die Spulen im gleichen Sinn (von gleich



grossen Strömen) durchflossen, sodass die eine Spule den Fluss des Feldes \vec{B} durch die andere Spule verstärkt.



Bei der symmetrischen Eigenschwingung werden die Spulen im Gegensinn vom Strom umflossen, sodass sich die Felder \vec{B} gegenseitig schwächen.

Welche Schwingung hat die höhere Frequenz?

Diese Frage lässt sich beantworten, ohne dass man mühsam den Vorzeichen nachgeht: Nach S. 192 wirkt sich der Auf- und Abbau eines Magnetfeldes in einer Spule so aus, als ob der Strom eine Trägheit hätte. Bei gegebenem Strom ist die Trägheit umso grösser, je grösser die Energie des magnetischen Feldes ist. Da sich bei der antisymmetrischen Schwingung die Felder verstärken, ist hier die magnetische Energie grösser, d.h. Frequenz ist kleiner als bei der symmetrischen Schwingung.

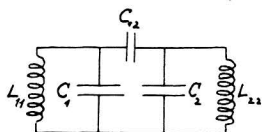
Spezialfall der vollkommeneren Kopplung:

Die stärkste Kopplung, die möglich ist, ist erreicht, wenn $L_{12}^2 = L_{11} L_{22}$ (vgl. S. 162/163). Die Säkulargleichung auf S. 209 hat dann nur eine Lösung, nämlich $\omega^2 = \frac{1}{L_{11}C_1 + L_{22}C_2}$.

(Im der Mechanik würde dies der starren Kopplung entsprechen: Die Pendel sind durch eine starre Stange statt durch eine Feder gekoppelt. Beachte den Unterschied.)

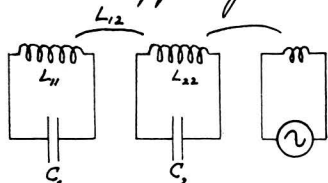
Kapazitive Kopplung:

Auch auf kapazitiven Wege können zwei Schwingkreise linear gekoppelt werden. Die skizzierte Schaltung entspricht genau der Kopplung zweier Pendel durch eine Feder.



Demonstrationsexperimente:

Die freien Schwingungen des Systems der gekoppelten Schwingkreise sind schwierig zu demonstrieren, da sie wegen den Ohm'schen Widerständen sehr rasch abklingen (vgl. S. 204). Man kann jedoch das System von aussen zu erzwungenen Schwingungen anregen z.B. durch induktive Ankopplung an einen Wechselstromgenerator. Wenn



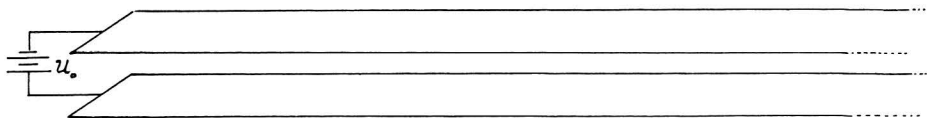
die Generatorfrequenz mit einer Eigenfrequenz des Systems der gekoppelten Kreise übereinstimmt, dann ist die Stromamplitude

in beiden Schwingkreisen maximal. Als Funktion der Generatorfrequenz beobachtet man also zwei Strommaxima, auch dann, wenn die beiden LC-Kreise gleich sind. Unterbricht man einen der beiden Schwingkreise, dann tritt im anderen nun noch ein einziges Strommaximum auf, und zwar bei der Resonanzfrequenz des einzelnen Kreises.

10. Elektromagnetische Wellen

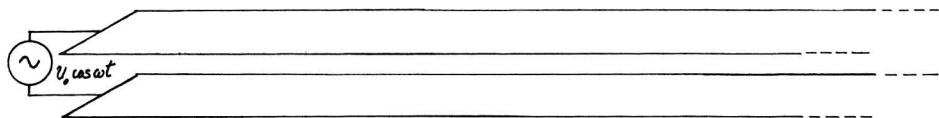
10.1. Wellenfortpflanzung längs einer Doppelleitung

Betrachte einen langen Plattenkondensator, der an eine Spannungsquelle angeschlossen ist. Wenn diese eine Batterie ist, dann besteht kein Zweifel, dass die



Platten Äquipotentialgebiete sind. Problematischer wird die Sa-

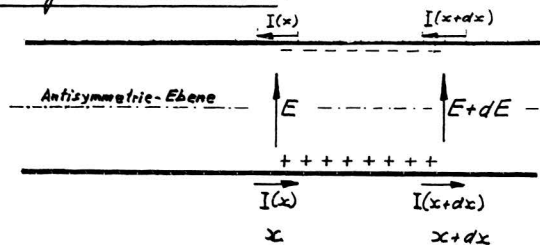
che, wenn der lange Kondensator an einen Wechselstromgenerator mit der Spannung $U(t) = U_0 \cos \omega t$ angeschlossen ist. Er wird dann periodisch



aufgeladen und entladen. Es fließen also Ströme längs den Kondensatorplatten. Zum elektrischen Felde kommt noch ein magnetisches Feld hinzu. Das heisst, dass die Selbstinduktion der Leitung eine Rolle spielt (vgl. S. 170/171). Die Kondensatorplatten sind dann keine Äquipotentialgebiete mehr (so wenig wie eine Spule, in der ein zeitlich veränderlicher Strom fließt.) Die Impedanz, die der Generator "sieht", entspricht also nicht notwendigerweise einer Kapazität.

Wir betrachten nun den Extremfall, wo sich die Doppelleitung bis ins unendlich Ferne erstreckt. Ob die Leitung aus parallelen Bündeln, zwei parallelen Drähten oder aus konzentrischen Rohren besteht, ist für die folgenden Überlegungen unwesentlich. Wesentlich ist nur, dass im Sinne der Betrachtungen auf S. 170/171 eine Selbstinduktion L^* pro Längeneinheit und eine entsprechende Kapazität C^* existiert, und dass sich L^* und C^* längs der Leitung nicht ändern.

Analyse der Situation:



Um unwesentliche Komplikationen zu vermeiden, betrachten wir zwei parallele gleiche Leiter. Die Anordnung ist dann antisymmetrisch, was Ladungen

und Ströme anbelangt. (Die Übertragung der nun folgenden Überlegungen auf andere parallele Leitungen, z. B. koaxiale Rohre, ist unproblematisch und führt auf dasselbe Endergebnis). Im Zeitpunkt t sollen die Ladungen und Ströme im Abschnitt der

Doppelleitung zwischen x und $x+dx$ die eingezeichneten Vorzeichen bzw. Richtungen haben. An anderen Stellen oder zu anderen Zeiten können die Vorzeichen und Richtungen umgekehrt sein. Die Antisymmetrie bezüglich der strichpunktierten Ebene muss aber für die ganze Länge der Leitung gewahrt bleiben. Wir setzen voraus, dass die Ausbreitungszeit der Felder über den Abstand d der beiden Leiter kurz ist im Vergleich zur Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\omega}$. Der infinitesimale Abschnitt der Doppelleitung zwischen x und $x+dx$ kann damit als Kondensator der Kapazität C^*dx betrachtet werden. Die Änderung seiner Ladung im Zeitintervall dt zur Zeit t ist

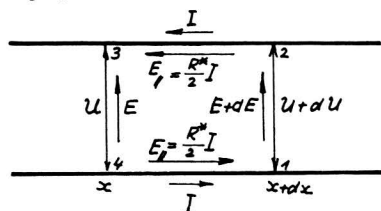
$$d^2Q = [I(x,t) - I(x+dx,t)] dt = -\frac{\partial I}{\partial x} dx dt$$

Diese Ladungsänderung lässt sich auch ausdrücken durch die Kapazität C^*dx und die Änderung dU der Potentialdifferenz zwischen den beiden Leitern im Zeitintervall dt . Es ist $U = U(x,t)$. Für den betrachteten Leitungsabschnitt dx am Orte x ist $dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt$, so dass nach der Definitionsgleichung $Q = CU$ der Kapazität

$$d^2Q = C^*dx \frac{\partial U}{\partial t} dt. \text{ Der Vergleich der beiden Ausdrücke liefert}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C^*} \frac{\partial I}{\partial x} \quad (1)$$

Ein weiterer Zusammenhang zwischen $U(x,t)$ und $I(x,t)$ ergibt sich aus dem Ohm'schen Gesetz und dem Induktionsgesetz. Sei R^* der Widerstand pro Längeneinheit von Hin- und Rückleitung (die man sich als in Serie geschaltet vorstellen muss). Der einzelne Leiter hat also den Widerstand $\frac{1}{2}R^*$ pro Längeneinheit. Die



Anwendung der Integralform des Induktionsgesetzes auf das Rechteck 1-2-3-4-1 liefert

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{im SI})$$

Mit $\Phi = LI$ (S. 168) und $L = L^*dx$ wird dann

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -L^*dx \frac{\partial I}{\partial t} \quad (2)$$

Wir teilen nun das Zirkulationsintegral auf in die Beiträge der einzelnen Rechteckseiten:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = U + dU + \frac{1}{2} R^* dx I - U + \frac{1}{2} R^* dx I = dU + R^* I dx$$

Die obige Skizze ist eine Momentaufnahme im Zeitpunkt t , sodass in dieser Betrachtung $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx$; damit wird

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + R^* I \right) dx \quad (3) \quad \text{Der Vergleich mit (2) liefert}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L^* \frac{\partial I}{\partial t} - R^* I \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (4) \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = -L^* \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - R^* \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} (3) \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{C^*} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Da die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden darf, gilt} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{R^* \partial I}{L^* \partial t} = \frac{1}{L^* C^*} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{R^* \partial U}{L^* \partial t} = \frac{1}{L^* C^*} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{array}}$$

Analog findet man durch $\frac{\partial}{\partial t} (1)$ und $\frac{\partial}{\partial x} (4)$

Dieser Gleichungstyp wird Telegraphengleichung genannt. Ähnlich wie die Wellengleichung hat sie viele Lösungen. Diese hängen von den Randbedingungen ab, z.B. davon, welches Signal man am Anfang der Leitung hineingibt, und wie die Leitung am Ende abgeschlossen ist.

Zwei Grenzfälle der Telegraphengleichung

a) Kleiner Ohm'scher Widerstand und grosse Selbstinduktion:

$\frac{R^* \partial}{L^* \partial t} \ll \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. In der Limite $R^* \rightarrow 0$ geht die Telegraphengleichung in die Wellengleichung über:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{L^* C^*} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} \quad \text{und analog für } I.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt nach den Überlegungen, die in Physik I S. 219 dargelegt sind, $\frac{1}{\sqrt{L^* C^*}}$. Wenn die Leiter im Vakuum sind, ist nach S. 171 $\frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = c$, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Befinden sich die Leiter in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ und der Permeabilität μ , dann ist nach S. 172 $\frac{1}{\sqrt{L^*C^*}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, d.h. die Phasengeschwindigkeit ist $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Solange ϵ und μ frequenzunabhängig sind, tritt keine Dispersion auf, und Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit sind identisch (Physik I, S. 291-300). Ein Signal pflanzt sich dann unverzerrt längs der Leitung fort.

b) Grosser Ohm'scher Widerstand und kleine Selbstinduktion:

Im Grenzfall $\frac{R^* \partial}{L^* \partial t} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ wird

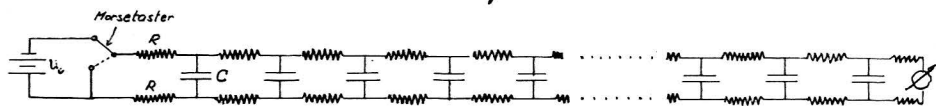
$$\boxed{\frac{R^*}{L^*} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{L^* C^*} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} \quad \text{und analog für } I$$

In der Wärmelehre wird gezeigt, dass die Temperaturverteilung $T(x,t)$ längs eines Stabes einer Differentialgleichung von diesem Typ gehorcht:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{wobei } \lambda = \text{Wärmeleitfähigkeit, } \rho = \text{Dichte, } c = \text{spezifische Wärme.}$$

Diese Gleichung wird Temperaturdiffusionsgleichung, Temperaturleitungsgleichung oder Wärmeleitungsgleichung genannt.

Längs einer Doppelleitung mit vernachlässigbarer Selbstinduktion pflanzt sich ein elektrisches Signal ähnlich fort wie ein "Temperatursignal" längs eines wärmeleitenden Stabes. Eine Leitung, die diesem Grenzfall entspricht, lässt sich simulieren durch eine Kette von Widerständen und Kapazitäten:



Ein Morsepunkt kommt am Ende der Kette als breiter Buckel an. (Demonstrationen).

Die Lösung der Telegraphengleichung für ein cos-Signal.

Wir denken uns am Anfang einer unendlich langen Doppelleitung einen idealen Wechselspannungsgenerator angeschlossen, sodass

$U(0, t) = U_0 \cos \omega t$. Wir betrachten nun den eingeschwungenen (stationären) Zustand und gehen zur komplexen Schreibweise über. Da die Telegraphengleichung eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist, darf man annehmen, dass sich die Frequenz ω längs der Leitung nicht ändert. Wir machen deshalb den Ansatz

$U(x, t) = \mathcal{U}(x) e^{i\omega t}$, wobei $\mathcal{U}(x)$ im allgemeinen komplex sein wird, da wir im Exponenten keine Phasenverschiebung eingeführt haben. Für diesen Ansatz gilt allgemein $\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$. Damit kann man aus der Telegraphengleichung die erste Ableitung nach der Zeit eliminieren, und es wird

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{iR^*}{\omega L^*} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{L^* C^*} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{L^* C^* \left(1 - \frac{iR^*}{\omega L^*}\right)} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Dies ist die Wellengleichung. Allerdings ist die Phasengeschwindigkeit v komplex, indem formal $v^2 = \frac{1}{L^* C^* \left(1 - \frac{iR^*}{\omega L^*}\right)}$.

Damit können wir den Ansatz präzisieren: $U(x, t)$ wird eine harmonische Welle sein mit komplexer Phasengeschwindigkeit v .

Die Lösung $U(x, t) = U_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{v})}$ erfüllt die Bedingungen am Anfang der Leitung. U_0 ist eine reelle Amplitude.

Interpretation der komplexen Phasengeschwindigkeit v : Wir betrachten als Beispiel den Fall des Vakuums und setzen $C^* = \frac{1}{L^* C^*}$, sodass $\frac{C^*}{v^2} = 1 - \frac{iR^*}{\omega L^*}$. Für das komplexe Verhältnis $\frac{C^*}{v}$ pflegt man zu schreiben

$\frac{C^*}{v} = n - i\kappa$, wobei n und κ reelle Zahlen sind, die sich leicht berechnen lassen. Man erhält

$$n^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R^*}{\omega L^*} \right)^2} \right) \quad \text{und} \quad \kappa^2 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R^*}{\omega L^*} \right)^2} \right)$$

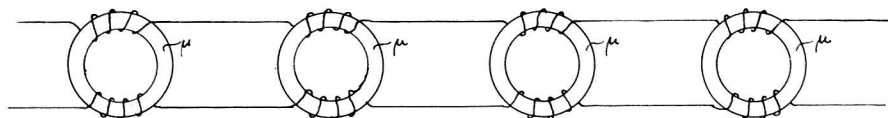
Setzt man $\frac{1}{v} = \frac{n - i\kappa}{c}$ in die komplexe Welle ein, so wird

$$U(x, t) = U_0 e^{-\frac{\omega \kappa x}{c}} e^{i\omega \left(t - \frac{n x}{c} \right)}$$

dies ist eine Welle, deren Amplitude auf dem Wege

exponentiell abnimmt, eine gedämpfte Welle. Die Phasengeschwindigkeit ist c/n , also kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Sie hängt von der Frequenz ω ab, d.h. es tritt Dispersion auf (vgl. Physik I S. 291-296). Auch der Dämpfungsterm $e^{-\frac{\omega \kappa}{c} x}$ ist frequenzabhängig. Ein nicht-harmonisches Signal wird also bei der Transmission durch die Leitung verzerrt, da jede Fourierkomponente ihre eigene Phasengeschwindigkeit und ihre eigene Dämpfung besitzt.

Wie die Formeln für n^2 und κ^2 zeigen, kann man die Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit und der Dämpfung und damit die Verzerrung von Signalen vermindern, indem man die Selbstinduktion der Leitung pro Längeneinheit erhöht. Bei gewöhnlichen Telefonleitungen baut man sog. Pupin-Spulen in die Leitung ein. Diese haben Kerne mit hoher Permeabilität, sodass die Erhöhung des Widerstandes gegenüber der Erhöhung der Selbstinduktion nicht ins Gewicht fällt. Solange der Ab-



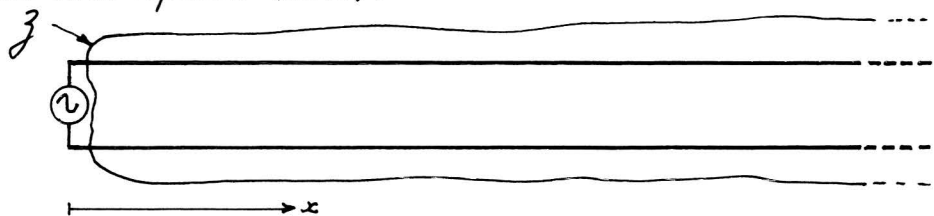
stand der Spulen klein ist gegen die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{nv}$, wirken sie wie eine kontinuierlich verteilte Selbstinduktion

10.2. Die Impedanz einer Doppelleitung

10.2.1. Die unendlich lange Doppelleitung.

Wir nehmen zur Vereinfachung der Überlegungen an, dass der Ohm'sche Widerstand der Leitung verschwindet, d.h. dass $R^* = 0$. Es läuft dann eine harmonische, ungedämpfte Welle auf der Leitung vom Generator weg ins Unendliche. Damit

wandert auch Feldenergie (S. 45/61 und S. 175/176) ins Unendliche und kommt nicht mehr zum Generator zurück. Die mittlere Leistung, die er aufbringen muss, kann also nicht null sein. Der Phasenwinkel φ kann also weder $+\frac{\pi}{2}$ noch $-\frac{\pi}{2}$ betragen (S. 193). Die Impedanz Z , welche der Generator "sieht" entspricht also weder einer Selbstinduktion noch einer Kapazität (S. 185).



Da wir $R^* = 0$ voraussetzen ist die Rechnung einfach. Nach S. 217 ist dann $v = c$, $\kappa = 0$, $n = 1$ für den Fall des Vakuums. Für $U(x, t)$ und $I(x, t)$ gilt dieselbe Wellengleichung (S. 215). Die entsprechenden harmonischen Wellen können sich höchstens in der Phase (und selbstverständlich in der Amplitude) unterscheiden:

$$U(x, t) = U_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \quad (\text{bei } x=0 \text{ haben wir die Generatorspannung})$$

$$I(x, t) = I_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \cdot e^{-i\varphi} \quad (\text{vgl. S. 183/184})$$

U_0 und I_0 bedeuten reelle, positive Größen (Amplituden). Nach Gleichung ① auf S. 214 gilt

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C^*} \cdot \frac{\partial I}{\partial x}. \quad \text{Setzt man die obigen harmonischen Wellen ein, wird}$$

$$i\omega U_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} = -\frac{I_0}{C^*} \left(-\frac{i\omega}{c}\right) e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \cdot e^{-i\varphi}$$

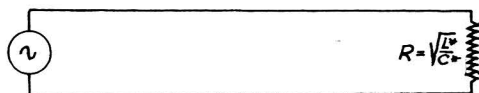
Da U_0 und I_0 reelle Amplituden sind, folgt $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$. Strom und Spannung sind also in Phase, d.h. die Impedanz Z ist reell:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{C^* c}. \quad \text{Mit } c^2 = \frac{1}{L^* C^*} \quad (\text{S. 171}) \text{ wird schliesslich}$$

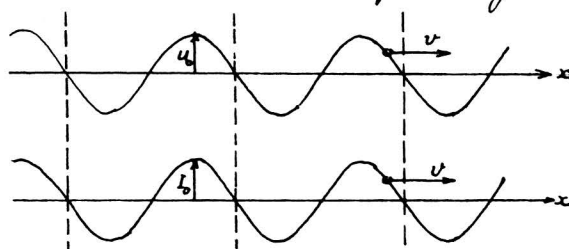
$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}}$$

die unendlich lange Doppelleitung belastet bei $R^* = 0$ den Generator wie ein Ohm'scher Widerstand vom Betrag $\sqrt{L^*/C^*}$. Dieser Widerstand wird

Wellenwiderstand genannt. (Wenn ein Physiker oder ein Elektrotechniker von einem "50 Ohm Kabel" spricht, dann ist der Wellenwiderstand gemeint). Eine unendlich lange Doppelleitung lässt sich allerdings nicht realisieren. Wenn man aber eine endliche Doppelleitung mit einem Ohm'schen Widerstand vom Wert $\sqrt{\frac{L}{C}}$ abschliesst, dann sind die Strom- und Spannungsverteilungen auf der Leitung dieselben, wie wenn sich die Leitung ins Unendliche fortsetzen würde: Die Stromstärke im Leiter ist eine laufende Welle und ebenso die Spannung zwischen den beiden Leitern.



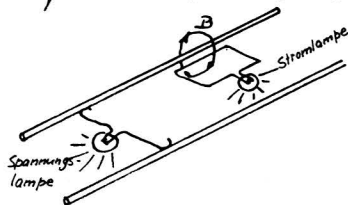
Beide Bestandteile der Welle sind in Phase. An jeder beliebigen Stelle x fließt ein Wechselstrom im Leiter, dessen Amplitude von x_0 unabhängig ist. Und an jeder beliebigen Stelle liegt auch eine Wechselspannung zwischen den Leitern, deren Amplitude ebenfalls vom Ort x unabhängig ist.



Beide Bestandteile der Welle sind in Phase. An jeder beliebigen Stelle x fließt ein Wechselstrom im Leiter, dessen Amplitude von x_0 unabhängig ist. Und an jeder beliebigen Stelle liegt auch eine Wechselspannung zwischen den Leitern, deren Amplitude ebenfalls vom Ort x unabhängig ist.

Experiment mit Hochfrequenz $\nu = 10^8 \text{ sec}^{-1}$, $\lambda = \frac{c}{\nu} = 3 \text{ m}$:

Die Spannung zwischen den beiden Leitern wird angezeigt durch ein kleines Lämpchen, das an die Leiter angeschlossen wird. Der Strom im Leiter wird durch seine Induktionswirkung festgestellt, die ein zweites Lämpchen aufleuchten lässt. Die Helligkeit der beiden Lampen sollte unabhängig sein von der Stelle x längs der Leitung. Im Experiment ist dies nicht genau der Fall, da der Abschlusswiderstand nicht völlig induktions- und kapazitätsfrei ist. (Experimente können nie unter idealen Bedingungen durchgeführt werden!).

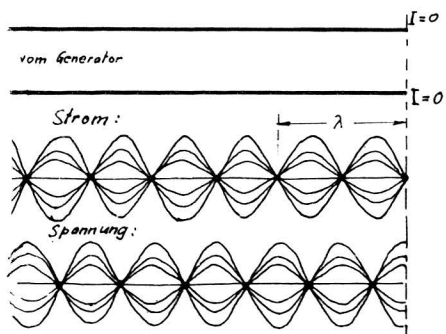


10.2.2. Die Doppelleitung endlicher Länge.

Wir beschränken uns auf den Fall wo der Ohm'sche Widerstand vernachlässigbar ist (vgl. S.215).

a) Die am Ende offene Leitung.

Die Welle wird am Ende der Leitung nahezu vollständig*) reflektiert und überlagert sich der einfallenden Welle, sodass eine stehende Welle resultiert (Physik I, S.235/236). Gaur am Ende ist keine Kapazität mehr da, die aufgeladen werden könnte, also kann am Ende der Leitung kein Strom mehr fließen: Die stehende Stromwelle hat einen Knoten. Andererseits fließt



im Abstand $\lambda/4$ vom Ende noch ein Strom, der die Kapazität vom Endstück auf- und entlädt. Die Vermutung ist naheliegend, dass am Ende ein Spannungsbauch auftritt. Dies wird durch das Experiment bestätigt. Stromlampe und Spannungslampe leuchten

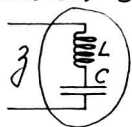
und löschen alternierend, wenn man ihre Position x variiert: Die Stromknoten fallen mit den Spannungsbäuchen zusammen und umgekehrt. Man kann sogar in den Spannungsknoten die Leitung kurzschliessen, ohne dass sich hinter dem Kurzschluss etwas ändert!

Die Impedanz, die der Generator sieht, hängt in periodischer Weise von der Länge l der Doppelleitung ab, wie man der obigen Skizze entnehmen kann. Da keine Energie im System verheizt wird, und keine Energie vom System abgestrahlt wird*), kann die Impedanz nur rein imaginär ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$), null

*) Es ist wichtig, dass der Abstand der beiden Leiter klein ist im Vergleich zur Wellenlänge.

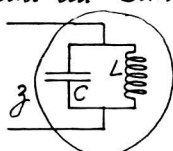
oder unendlich sein:

Bei $l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ liegt am Leitungsanfang ein Spannungsknoten und ein Strombauch, sodass $Z = 0$. Der Generator sieht eine Impedanz, die der Serienschaltung einer Selbstinduktion L mit einer Kapazität C entspricht, wobei die Resonanzbedingung erfüllt ist:

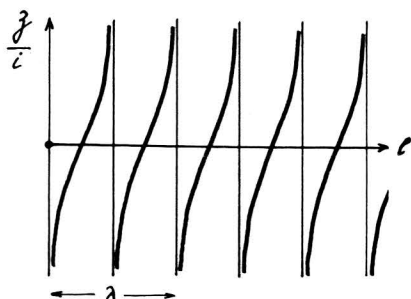


$$Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \quad \text{bei} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Bei $l = 2n\frac{\lambda}{4}$ liegt am Leitungsanfang ein Spannungbauch und ein Stromknoten, sodass $Z = \infty$. Der Generator sieht eine Impedanz, die der Parallelschaltung einer Selbstinduktion L mit einer Kapazität C entspricht, wobei wieder die Resonanzbedingung erfüllt ist:

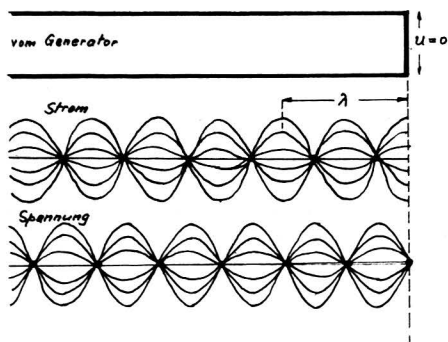


$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0 \quad \text{bei} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$



Für Längen dazwischen ist Z bzw. $\frac{1}{Z}$ rein imaginär. Die Funktion $\frac{1}{i}Z(l)$ ist nebenstehend skizziert. Im wesentlichen handelt es sich um eine \cot -Funktion, da die Spannung räumlich wie ein Cosinus und der Strom wie ein Sinus variiert, wenn l vom offenen Ende der Leitung aus gemessen wird.

b). Die am Ende kurzgeschlossene Leitung.

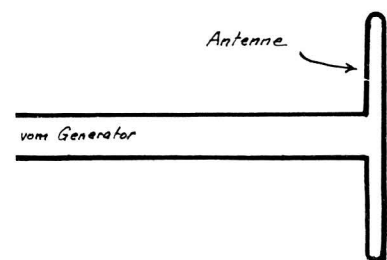


Auch in diesem Fall wird die Welle unter idealisierten Bedingungen am Ende vollständig reflektiert, und es bildet sich eine stehende Welle aus. Da über dem kurzgeschlossenen Ende keine Spannung liegt, ist dort ein Spannungsknoten. Andersseits fließt ein grosser Strom, d.h. ein Strombauch.

liegt am Ende der Leitung. Die Impedanz, die der Generator sieht, überlegt man sich analog wie im vorhergehenden Fall.

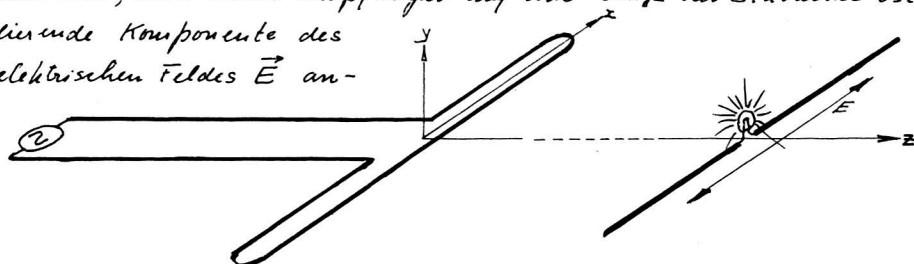
10.3. Wellenausbreitung im freien Raum

10.3.1. Demonstrationsexperiment zur Einleitung.



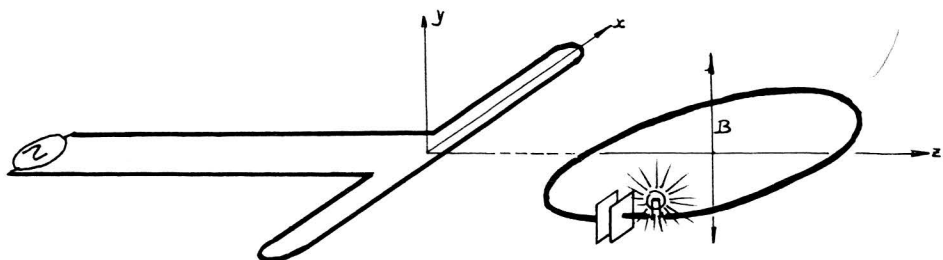
Wir schließen an das Ende der Doppelleitung eine Antenne an. Im Gegensatz zur offenen oder kurzgeschlossenen Doppelleitung beobachtet man nun mit den auf S. 220 beschriebenen Lämpchen keine Nullstellen von Strom

und Spannung mehr. Die Leitung verhält sich, als ob sie am Ende durch einen Ohm'schen Widerstand abgeschlossen wäre. Durch geeignete Dimensionierung der Antenne kann man erreichen, dass die stehende Welle nur noch schwach ist. Die laufende Welle dominiert. Die Impedanz, die der Generator sieht, ist damit nicht mehr rein imaginär. Im Zeitmittel leistet also der Generator elektrische Arbeit am System (vgl. S. 193/194). Die Antenne wird aber nicht heiß, im Gegensatz zu einem Ohm'schen Abschlusswiderstand. Man kann daraus schließen, dass die Antenne Energie abstrahlt in den Raum. Die Abstrahlung lässt sich leicht nachweisen mit einem einfachen Empfänger, der aus zwei gleich langen Aluminiumstäben besteht, die über eine kleine Glühlampe leitend verbunden sind. Es ist offensichtlich, dass dieser Empfänger auf eine längs der Stabachse oszillierende Komponente des elektrischen Feldes \vec{E} an-



spricht. Das Experiment zeigt, dass das Lämpchen z.B. für Punkte in der yz -Ebene am hellsten leuchtet, wenn die Stabachse parallel zur Achse x der Antenne ist, und erlöscht, wenn die Stabachse senkrecht zur x -Achse ist. Wir schliessen, dass die abgestrahlte Welle in diesen Punkten ein parallel zur x -Achse oszillierendes Feld \vec{E} hat.

Mit einer Induktionsschleife, die zusammen mit einem Kondensator einen auf die Frequenz des Senders abgestimmten Schwingkreis bildet, kann man nachweisen, dass die Welle auch ein oszillierendes Feld \vec{B} hat, das senkrecht auf dem Feld \vec{E} steht.



Die abgestrahlte Welle ist transversal, sowohl was \vec{E} als auch was \vec{B} anbelangt.

10.3.2. Der Zusammenhang zwischen den Maxwell'schen Gleichungen und der Wellengleichung.

a. Elektromagnetische Wellen im Vakuum.

Es sollen keine Ladungsträger und keine Materialien im betrachteten Raum vorhanden sein. Es ist dann $\text{div } \vec{E} = 0$, und der einzige Strom, der vorkommt, ist der Maxwell'sche Verschiebungsstrom. Die Maxwell'schen Gleichungen sind dann nach S. 178 und 151

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Wir leiten die erste Gleichung nach der} \\ \text{Zeit ab und bilden die Rotation der} \\ \text{zweiten Gleichung:} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} &= \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Wir benutzen die Identität $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$. Das Symbol Δ bedeutet den Laplace Operator. Seine Anwendung auf den Vektor \vec{E} ergibt wieder einen Vektor:

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Mit $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ wird dann

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{E}} \quad \text{Für jede Komponente von } \vec{E} \text{ gilt also die}$$

Wellengleichung. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ist gegeben durch (vgl. Physik I, S. 219):

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Damit haben wir die Erklärung für die merkwürdigen Beziehungen, die der Diskussion der Massensysteme auftraten (S. 10-14): Licht ist eine elektromagnetische Welle.

Durch Bildung der Rotation der ersten Maxwell'schen Gleichung und Ableitung der zweiten Maxwell'schen Gleichung nach der Zeit kann man \vec{E} eliminieren. Es wird

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{B}} \quad \text{Auch für } \vec{B} \text{ gilt die Wellengleichung.}$$

Auf die Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{B} werden wir später eingehen.

James Clark-Maxwell vermochte auf diese Weise bereits um 1865 elektromagnetische Wellen vorauszusagen die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten sollten. Mit Hilfe von Schwingkreisen und Antennen wurden solche Wellen von Heinrich Hertz um 1888 herum erzeugt

und systematisch untersucht.

b. Elektromagnetische Wellen in einem homogenen, isotropen, nichtleitenden, elektrisch polarisierbaren, magnetisierbaren Medium.

Wir setzen lineare Materialgesetze voraus, d.h. es sei $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ (S. 58, 143). Phänomenologisch betrachtet, soll das Medium keine wahren Ladungen enthalten, d.h. es sei $\text{div} \vec{D} = 0$ (S. 59). Die elektromagnetische Welle soll daran nichts ändern. Da ϵ und μ voraussetzungsgemäss ortsunabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \text{div} \vec{E}, \text{ sodass } \text{div} \vec{E} = 0, \text{ und} \\ \text{div} \vec{B} &= \mu \mu_0 \text{div} \vec{H}, \text{ sodass } \text{div} \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

die Maxwell'schen Gleichungen lauten nach S. 180 und S. 151 im vorliegenden Falle

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{durch Elimination von } \vec{H} \text{ bzw } \vec{E} \\ &\text{nach dem auf S. 224/225 angewen-} \\ &\text{deten Verfahren erhält man} \\ &\text{mit } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{ unabhängig vom Masssystem} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{\epsilon \mu} \Delta \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{\epsilon \mu} \Delta \vec{H} \end{aligned}$$

Das ist wieder die Wellengleichung. Im Gegensatz zum Vakuum ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht c , sondern $c/\sqrt{\epsilon \mu}$.

Da ϵ und μ bei jedem Material von der Frequenz ω abhängen, muss man die Geschwindigkeit $v = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ als Phasengeschwindigkeit auffassen (vgl. Physik I, S. 291-300).

Der Brechungsindex eines Materials für elektromagnetische Wellen ist definiert als $n = \frac{c}{v}$ (vgl. Physik I S. 250-252). Im hier diskutierten Fall ist also $n = \sqrt{\epsilon \mu}$. *)

Demonstrationsexperiment: Brechung von elektromagnetischen Wellen mit

*) Wenn die Entstehung der Magnetisierung oder der dielektrischen Polarisation mit Reibung verknüpft ist, entstehen Komplikationen, auf die hier nicht eingegangen wird.

einer Wellenlänge $\lambda = 3 \text{ cm}$ (sog. "Mikrowellen") an einem Paraffin-Prisma ($\mu = 1.00$, $\epsilon = 2.2$).

Anmerkung: Es gibt Fälle, in denen $\sqrt{\epsilon\mu} < 1$. Insbesondere kann dies für Röntgenstrahlen zutreffen. Die Phasengeschwindigkeit wäre grösser als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit! Dieser Fall kommt indessen nur durch eine besondere Frequenzabhängigkeit von $\sqrt{\epsilon\mu}$ zustande, d.h. durch besondere Dispersionsverhältnisse. Diese sind so beschaffen, dass man mit den Begriffen Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit nicht durchkommt.

c. Elektromagnetische Wellen in leitenden Medien.

Wir charakterisieren das Material durch feldunabhängige Größen ϵ , μ und σ . Nach dem Ohm'schen Gesetz ist $\vec{i}_{\text{leit}} = \sigma \vec{E}$. Damit werden die Maxwell'schen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{die Elimination von } \vec{H} \text{ bzw. } \vec{E} \\ \text{führt mit } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{ auf} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{c^2}{\mu \epsilon} \Delta \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{c^2}{\mu \epsilon} \Delta \vec{H} \end{aligned}}$$

Diese Vektorgleichungen sind völlig analog zur skalaren Telegraphengleichung auf S. 215. Wir können damit die Lösungen sofort hinschreiben.

Betrachte als Beispiel eine ebene Welle, deren \vec{E} -Vektor parallel ist zur y-Achse, und die sich längs der x-Achse fortpflanzt. (Die Richtung von \vec{H} werden wir uns später überlegen). Für $E(x, t)$ gilt dann

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c^2}{\mu \epsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad \text{Für ein Signal, das zeitlich wie } \cos \omega t \text{ variiert, ist nach S. 217 die Lösung gegeben durch}$$

$$E(x, t) = E_0 e^{-\frac{\kappa \omega}{c} x} e^{i\omega(t - \frac{n}{c} x)} \quad , \quad \text{wobei}$$

$$\boxed{n^2 = \frac{1}{2} \epsilon \mu \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \right)^2} \right) \quad \text{und} \quad \kappa^2 = \frac{1}{2} \epsilon \mu \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \right)^2} \right)}$$

Dämpfung und Phasengeschwindigkeit sind frequenzabhängig, und zwar bei nicht verschwindender Leitfähigkeit auch dann noch, wenn die Materialgrößen ϵ , μ und σ nicht von der Frequenz abhängen.

d. Diskussion und Beispiele.

Bei der Anwendung der Formeln für n und κ ist darauf zu achten, dass die Größen ϵ , μ und σ für alle Materialien frequenzabhängig sind. Es kommen im allgemeinen ganz falsche Resultate heraus, wenn man die statisch (mit Gleichspannung bzw. Gleichstrom) gemessenen Werte einsetzt. Es sind die Werte $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ und $\sigma(\omega)$ für die Frequenz der Welle einzusetzen. Eine Besprechung der Frequenzabhängigkeit der Materialgrößen sprengt den Rahmen dieser Vorlesung.

① Der Grenzfall $\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0\omega} \ll 1$

Durch Entwicklung der Wurzel erhält man

$$n^2 = \frac{1}{2} \epsilon \mu \left[1 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0\omega} \right)^2 + \dots \right] \approx \epsilon \mu \left[1 + \left(\frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0\omega} \right)^2 \right]$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \epsilon \mu \left[-1 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0\omega} \right)^2 + \dots \right] \approx \epsilon \mu \left(\frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0\omega} \right)^2$$

Die effektive reelle Phasengeschwindigkeit $v = \frac{c}{n}$ ist etwas kleiner als im nichtleitenden Medium mit derselben Dielektrizitätskonstanten und derselben Permeabilität (vgl. S. 226). Die Amplitude der Welle sinkt auf der Strecke $\frac{c}{\kappa\omega} \approx \frac{2\epsilon_0 c}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ auf den e -ten Teil, und die Intensität (die proportional ist zum Quadrat der Amplitude) sinkt auf der Strecke $\Delta \approx \frac{\epsilon_0 c}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ auf den e -ten Teil. Diese Strecke Δ wird als Eindringtiefe bezeichnet und ihr reziproker Wert als Absorptionskoeffizient.

Folgendes Beispiel soll illustrieren, dass man in die Formeln für n , κ und Δ nicht die statisch gemessenen Materialgrößen einsetzen darf:

Leitungswasser, statisch gemessen:

$$\sigma \approx 10^{-2} \text{ Ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}, \quad \epsilon = 81, \quad \mu = 1$$

Wir machen nun die (falsche) Annahme, dass diese Werte auch noch gelten bei folgenden Frequenzen, für die das Experiment leicht zu demonstrieren ist

$$\nu \approx 10^{10} \text{ sec}^{-1}, \quad \lambda_{\text{vbk}} \approx 3 \text{ cm}, \quad \text{ sog. Mikrowellen}$$

$$\nu \approx 6 \times 10^{14} \text{ sec}^{-1}, \quad \lambda_{\text{vbk}} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ cm} = 5000 \text{ \AA}, \quad \text{ sichtbares Licht}$$

Mit den obigen Werten für σ , ϵ und μ wäre man im Grenzfall kleiner Leitfähigkeit, indem

$$\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \begin{cases} \text{für Mikrowellen} & \frac{10^{-2}}{81 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 6,28 \times 10^{10}} = 2,2 \times 10^{-4} \ll 1 \\ \text{für Licht} & \frac{10^{-2}}{81 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 6,28 \times 6 \times 10^{14}} = 3,7 \times 10^{-9} \ll 1 \end{cases}$$

Der Brechungsindex wäre in guter Näherung $n \approx \sqrt{\epsilon \mu} = 9$ bei beiden Frequenzen. Schon Ptolemäus wusste, dass Licht an der Grenzfläche Luft/Wasser nicht so stark gebrochen wird (Physik I, S. 250). Im sichtbaren Bereich ist $n = 1,33$. Auch die Eindringtiefe Δ stimmt nicht mit Experiment überein, wenn man die statischen Materialkonstanten in die Formel einsetzt:

$$\Delta \approx \frac{\epsilon_0 c}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^8}{10^{-2}} \cdot 9 = 2,4 \text{ m}$$

Man weiss, dass sichtbares Licht im "sauberen" Leitungswasser eine grössere Eindringtiefe hat. Mikrowellen hingegen werden schon in einer Schicht von einigen cm Dicke fast vollständig absorbiert (Demonstration).

Beim sichtbaren Licht ist die Diskrepanz zwischen Rechnung und Erfahrung leicht zu verstehen. Die hohe statische Dielektrizitätskonstante $\epsilon = 81$ ist auf die permanenten H_2O -Dipole zurückzuführen (vgl. S. 50). Diese können den Lichtschwingungen nicht folgen, sodass nur induzierte Dipole zur optischen Dielektrizitätskonstanten beitragen (vgl. S. 48). Auch die Ladungsträger, die für die Leitfähigkeit verantwortlich sind (Ionen), können den Lichtschwingungen nicht folgen. Es ist eine

Leitfähigkeit einzusetzen, die kleiner ist als die statisch gemessene.

Die Mikrowellenfrequenzen sind nicht so extrem, und man muss subtilere Betrachtungen anstellen, um Brechungsindex und Eindringtiefe zu verstehen. Insbesondere muss man daran denken, dass nicht nur der Leistungsmechanismus, sondern auch die Reorientierung der permanenten Dipole mit Reibung verknüpft ist. Unproblematisch ist nur die Permeabilität μ . Sie liegt sowohl für Licht, als auch für Mikrowellen nahe bei eins.

② Der Grenzfall $\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \gg 1$

Im Frequenzgebiet $0 < \omega < 10^{10} \text{ sec}^{-1}$ darf man annehmen, dass sich die Leitfähigkeit von Metallen im allgemeinen nicht um Grössenordnungen ändert. Dasselbe gilt für die Dielektrizitätskonstante. Allerdings lässt sie sich mit den üblichen Methoden nicht messen. Man kann aber annehmen, dass sie von derselben Grössenordnung ist wie für die meisten Materialien, d. h. zwischen 1 und 100. Wir wollen hier den Wert $\epsilon = 10$ einsetzen. Schliessen wir Supraleiter und ferromagnetische Materialien aus, dürfen wir ferner $\mu \approx 1$ setzen. Für die Leitfähigkeit σ setzen wir diejenige von Kupfer bei Zimmertemperatur ein, $\sigma \approx 5 \times 10^9 \text{ Ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Die Bedingung für den Grenzfall ist im ganzen betrachteten Frequenzbereich erfüllt. Nach S. 227 kann man dann schreiben

$$n^2 \approx \kappa^2 \approx \frac{1}{2} \epsilon \mu \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} = \frac{\mu \sigma}{2 \epsilon_0 \omega} \quad \text{Damit wird die Eindringtiefe}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{c}{2\omega \kappa} \approx c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\omega \mu \sigma}}}$$

Für Kupfer erhält man mit den obigen Werten für μ und σ

$$\Delta \approx \frac{1}{10^4 \omega} \quad (\text{Meter})$$

	Kraftnetz	lange Radiowellen	mittl. Radiowellen	Mikrowellen
Frequenz ν	50 Hz	500 kHz	50 MHz	10^{10} Hz
Eindringtiefe Δ	$5.6 \times 10^{-3} \text{ m}$	$5.6 \times 10^{-5} \text{ m}$	$5.6 \times 10^{-6} \text{ m}$	$4 \times 10^{-7} \text{ m}$

Hochfrequente Felder dringen nicht tief in metallische Leiter ein. Hochfrequenzströme fließen nur in einer dünnen Oberflächenschicht. Diese Erscheinung wird Skin-Effekt genannt. Bei Drahtleitungen hat der Skin-Effekt eine scheinbare Erhöhung des Ohm'schen Widerstandes zur Folge, da nicht der ganze Drahtquerschnitt zur Stromleitung ausgenutzt wird. Schon beim Kraftnetz ($\nu = 50 \text{ Hz}$) hat es keinen Sinn massive Kupferzylinder mit Durchmesser von einigen cm als Leitungen zu benutzen. Bänder, Rohre oder Litzen sind vorteilhafter.

Helikon-Wellen: Die gedämpfte Cosinuswelle, die oben diskutiert wurde, ist eine spezielle Lösung der Maxwell'schen Gleichungen. Es gibt noch andere Lösungen. In sehr gut leitenden (aber nicht supraleitenden) Metallen kann man andere Sorten von elektromagnetischen Wellen, sog. Helikon-Wellen beobachten.

10.3.3. Die ebene, laufende elektromagnetische Welle im nicht-leitenden Medium.

Die bisherigen Betrachtungen haben wohl für \vec{E} und \vec{B} je die Wellengleichung geliefert (S. 224-226), nicht aber eine Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{B} . Wir stellen nun folgende Frage: Wie liegen die Vektoren \vec{E} und \vec{B} im Raum relativ zueinander und bezüglich zur Fortpflanzungsrichtung der Welle, und welches ist die Beziehung zwischen den Beträgen der Feldstärken? Wir behandeln das Problem am Beispiel einer ebenen Welle, die sich langs der x-Achse fortpflanzt. Nach der Definition der ebenen Welle hängen die Vektoren \vec{E} und \vec{B} dann nur von der Koordinate x ab. (In der Vorlesung Physik I betrachteten wir nur skalare Wellen. Die Vektoren \vec{E} und \vec{B} entsprechen den damals eingeführten "Auslenkungen".) Damit gilt für alle Kom-

ponenten des \vec{E} -Feldes $\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$, und analog für \vec{B} .

a. Vakuum.

Es sind keine Ladungen vorhanden: $\text{div } \vec{E} = 0$ (S. 23),

d.h. $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ Das zweite und dritte Glied verschwindet wegen der Annahme der ebenen Welle, sodass $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, d.h. E_x ist ortsunabhängig. Wenn $E_x \neq 0$, dann muss in einer längs x fortschreitenden Welle E_x eine Funktion von x sein. (Eine periodische Funktion im Falle einer harmonischen Welle.) Es bleibt uns also nichts anderes, als zu setzen $E_x = 0$.

Analog folgt aus $\text{div } \vec{B} = 0$ $B_x = 0$:

\vec{E} und \vec{B} stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Elektromagnetische Wellen sind transversal.

(Demonstrationen mit den auf S. 223 beschriebenen Empfangsantenne).

Wir wählen nun die y -Achse des Koordinatensystems parallel zum \vec{E} -Vektor. Wie ist dann \vec{B} gerichtet? Die Antwort lässt sich mit Hilfe der zweiten Maxwell'schen Gleichung finden. In Komponenten geschrieben lautet sie:

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & \text{Nach unseren Voraussetzungen verschwinden} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \text{beide Seiten der ersten Gleichung. Die} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \text{zweite Gleichung liefert } 0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \text{ und} \\ & \text{die dritte } \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{array}$$

B_y ist damit zeitunabhängig und hat mit der betrachteten Welle nichts zu tun, d.h. wir dürfen setzen $B_y = 0$. Nur die z -Komponente von \vec{B} ist von null verschieden:

\vec{E} und \vec{B} stehen senkrecht aufeinander.

In komplexer Schreibweise ist die betrachtete Welle gegeben durch

$$E_y = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}, E_z = 0, E_x = 0, B_z = B_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} e^{i\varphi}, B_y = 0, B_x = 0$$

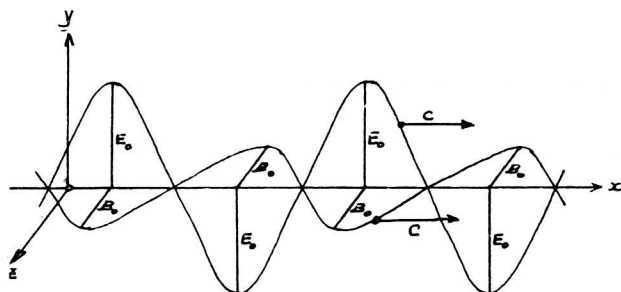
E_0 und B_0 sind reelle Amplituden, die Phasenverschiebung φ zwischen der \vec{E} -Welle und der \vec{B} -Welle ist vorläufig noch offen. Wir setzen nun diese Wellen in die Beziehung $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ ein und erhalten

$$-\frac{i\omega}{c} E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} = -i\omega B_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} e^{i\varphi} \quad \text{Daraus folgt}$$

$$E_0 = c B_0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

\vec{E} und \vec{B} schwingen in Phase, und an jedem Ort ist $E_y = c B_z$ SI.

Im e.s.u. ist $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$, sodass $E_y = B_z$



Die Achse, längs der der Vektor \vec{E} schwingt, wird heute allgemein als Polarisationsachse bezeichnet (y-Achse in der Skizze). In der älteren Literatur ist die

Polarisationsachse parallel zu \vec{B} .

6. Isotropes, nicht-leitendes Medium

Wenn lineare Materialgesetze gelten, $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ (vgl. S. 58 und 143), dann findet man auf analogem Wege wie oben:

\vec{B} und \vec{E} stehen senkrecht aufeinander und senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung und schwingen in Phase. Für die Beträge der Feldstärken gilt $E = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} B$ im SI und $E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} B$ im e.s.u.

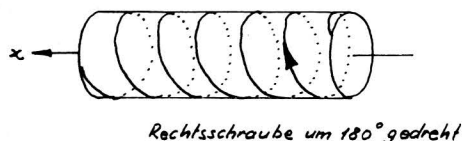
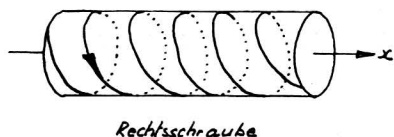
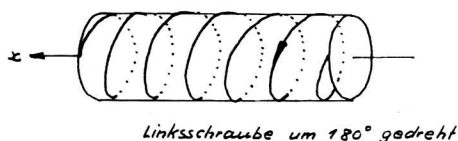
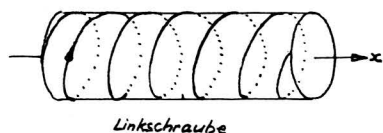
Diese Beziehungen gelten nicht nur für eine harmonische Welle, sondern für beliebige Wellenbündel, denn diese können als Superposition von harmonischen Wellen betrachtet werden.

C. Anisotrope Medien

Kristalle, deren Struktur nicht kubische Symmetrie aufweist, verhalten sich elektromagnetisch als anisotrope Medien. Die Materialgrößen ϵ , μ und σ sind dann Tensoren zweiter Stufe, solange wir uns auf lineare Materialgesetze beschränken. Sie verknüpfen linear \vec{E} mit \vec{D} , \vec{H} mit \vec{B} , \vec{i} mit \vec{E} . Die Verhältnisse sind dann viel komplizierter, als die Skizze auf S. 233. Insbesondere hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Polarisationsachse ab (Doppelbrechung), und die Richtung des Energietransportes ist nur in speziellen Fällen senkrecht zu den Ebenen gleicher Phase. Phänomenologisch isotrope Medien können durch mechanische Spannungen und elektrische Felder anisotrop gemacht werden (elasto-optische und elektro-optische Effekte). Demonstrationen.

d. Optische Aktivität

Bei vielen organischen Molekülen (Zucker, Weinsäure, Nukleinsäuren) kann man der Anordnung der Atome einen Schraubensinn (eine Helizität) zuordnen. Eine Schraube hat die fundamentale Eigenschaft, dass sich die Helizität nicht ändert, wenn man sie (z.B. um 180°) dreht um eine Achse, die senkrecht steht auf der Schraubenachse: Eine Rechtsschraube bleibt eine Rechtsschraube und eine Linksschraube bleibt eine Linksschraube (Physik I, S. 104).



In einer Lösung, die z.B. nur Rechtsschrauben enthält, mittelt sich also der Schraubensinn nicht heraus. Dies äussert sich darin, dass sich die Polarisationsachse beim Fortschreiten der Welle im Schraubensinn dreht. Man nennt das Medium dann "optisch aktiv". Es gibt auch (organische und anorganische) Kristalle, die eine Schraubenachse haben und deshalb optisch aktiv sind. Das klassische anorganische Beispiel ist Quarz.

Ein grosses Geheimnis der Natur ist folgendes: Bei einer gegebenen chemischen Zusammensetzung kommen Linksschrauben und Rechtsschrauben nicht mit gleicher Häufigkeit vor. Ganz drastisch zeigt sich dies in der organisch-biologischen Welt: Die Doppelhelix-Struktur von DNA (Desoxyribonucleinsäure) kommt nur als Rechtsschraube vor, und im Zucker, den wir essen überwiegen die Moleküle, die Linksschrauben entsprechen.

Demonstrationen: Drehung der Polarisationsachse des Lichtes beim Durchgang durch eine Zuckerlösung. Drehung der Polarisationsachse von Mikrowellen ($\lambda = 3\text{cm}$) beim Durchgang durch einen Haufen von Schraubenfedern aus Kupfer.

Anmerkung zu den Abschnitten 10.1 und 10.3.

Bei der Doppelleitung (S. 213-215) sind wir zur Telegraphengleichung gelangt, ohne die erste Maxwell'sche Gleichung (S. 177-180) zu benutzen. Man kann sich deshalb fragen, ob man auch die Wellenausbreitung im freien Raum ohne die erste Maxwell'sche Gleichung verstehen könnte. Die Antwort ist Nein. Die behandelte Doppelleitung ist ein ganz spezieller Fall; denn es wurde spezifiziert, dass Ströme nur längs den Leitern (parallel zur x -Achse) fliessen können. Es lohnt sich, über dieses Problem nachzudenken und den Fall zu betrachten, wo das Medium zwischen den beiden Leitern nicht vollkommen isoliert.

10.4. Der Energietransport in der elektromagnetischen Welle und der Poynting'sche Vektor

Wir gehen aus von der ungedämpften Welle. Bei der diskutierten Doppelleitung heisst dies $R^* = 0$ (S. 215), und im freien Raum $\sigma = 0$ (S. 224-226). Bei der Doppelleitung sieht man sofort ein, dass eine laufende Welle Energie transportiert. Eine reine laufende Welle hat man dann, wenn sich die Leitung bis ins unendlich Ferne erstreckt, oder wenn sie durch einen Ohm'schen Widerstand von der Grösse des Wellenwiderstandes $\sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$ abgeschlossen ist (S. 220). In beiden Fällen arbeitet der Generator auf die reelle Impedanz $Z = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$. Die Leistung, die er abgibt, verschwindet nicht (S. 193): Im ersten Fall fliesst sie ins unendlich Ferne und im zweiten Fall wird sie im Abschlusswiderstand verheizt.

Um zu einer Beziehung zwischen dem Wellenfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ und dem Energiefluss zu gelangen, betrachten wir die ebene elektromagnetische Welle im isotropen, nicht-leitenden Medium (vgl. S. 232/233):

Die Energiedichte des Feldes der laufenden Welle.

Analog, wie sich die Energiedichte in der elastischen Welle zusammensetzt aus der elastischen und der kinetischen Energie (vgl. Physik I, S. 229/230), so setzt sich die Energiedichte der elektromagnetischen Welle zusammen aus der elektrischen Energiedichte (S. 61) und der magnetischen Energiedichte (S. 175) *):

*) Diese beiden Energiedichten dürfen addiert werden, denn es handelt sich um wesensverschiedene Felder. (Was man nicht addieren darf, sind die Energiedichten zweier \vec{B} -Felder oder zweier \vec{E} -Felder. Vgl. S. 177.) Diese Argumentation ist aber insofern nicht ganz sauber, als die Felder \vec{E} und \vec{B} nicht unabhängig, sondern durch die Maxwell'schen Gleichungen verknüpft sind.

$$w_{\text{tot}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu \mu_0} B^2 \right)$$

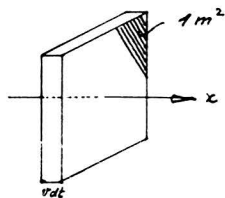
Nach S. 233 ist $E = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} B$, sodass mit $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ (S. 225)

$$\epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu \mu_0} B^2$$

In der laufenden elektromagnetischen Welle ist an jedem Ort und zu jeder Zeit die elektrische Energiedichte gleich der magnetischen Energiedichte.

(Dies gilt nicht für eine stehende Welle, denn die Energiedichte der linkslaufenden Welle darf nicht zur Energiedichte der rechtslaufenden Welle addiert werden.)

Die instantane Intensität S einer laufenden, ebenen Welle



Im infinitesimalen Zeitintervall dt fließt durch die Einheitsfläche, die senkrecht steht auf der Fortpflanzungsrichtung x , die elektromagnetische Energie, die in der skizzierten Platte der Dicke $v dt$ enthalten ist, wobei $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet. (Man muss sich vorstellen, dass sich das auf S. 233 skizzierte Feldbild translatorisch bewegt mit der Geschwindigkeit v). Die im infinitesimalen Zeitintervall dt pro sec senkrecht durch die Einheitsfläche fließende Energie wird als instantane Intensität S bezeichnet. Die Energie in der Platte ist damit $S dt$. Da die Dicke der Platte infinitesimal und die Welle eben ist, dürfen die Felder \vec{E} und \vec{B} in der Platte als homogen betrachtet werden, sodass

$$S dt = w_{\text{tot}} v dt = \frac{1}{2} \left(\epsilon \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu \mu_0} B^2 \right) \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} dt$$

Wegen der Gleichheit von elektrischer und magnetischer Energiedichte ist ferner $\frac{1}{2} \left(\epsilon \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu \mu_0} B^2 \right) = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu \mu_0} B^2 = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} EB$, womit

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} EB. \text{ Setzt man } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ und } \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \text{ so wird}$$

$$S = EH, \text{ wobei nach S. 233 } E = E_y \text{ und } H = H_z$$

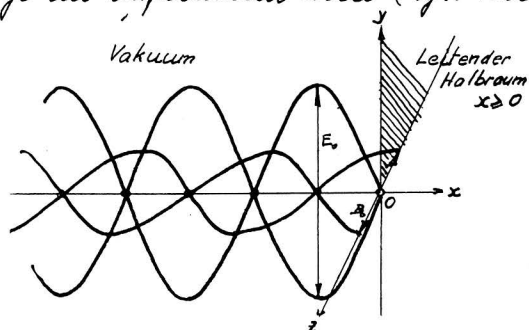
Folgende Verallgemeinerung ist naheliegend: Man fasse \vec{S} als Vektor auf, der in die Richtung des Energietransportes zeigt. Im hier betrachteten Spezialfall ist dann offensichtlich

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} \quad \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \cdot \text{sec}} \text{ im SI} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}} \quad \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}} \text{ in e.s.u.}$$

Tatsächlich gilt diese Formel allgemein, insbesondere auch für anisotrope und leitende Medien. \vec{S} ist der Poynting'sche Vektor. (J. H. Poynting 1884). Was wir hier berechnet haben, ist die instantane Intensität. Da \vec{E} und \vec{H} in Phase schwingen, variiert sie bei einer harmonischen Welle an einem festen Ort als Funktion der Zeit wie $\cos^2 \omega t$. Was man üblicherweise als Intensität berechnet, ist das Zeitmittel der instantanen Intensität.

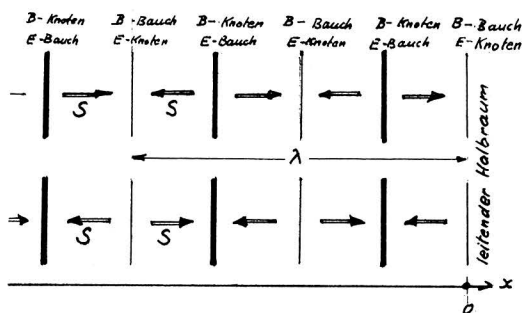
Die Energieverteilung in einer stehenden, ebenen Welle.

Auf der am Ende kurzgeschlossenen Doppelleitung bildet sich nach S. 222 eine stehende Welle aus, bei der am Kurzschluss ein Strombauch und ein Spannungsknoten liegt. Die entsprechende Situation entsteht, wenn eine ebene Welle aus dem Vakuum senkrecht auf die Oberfläche eines leitenden Halbraumes fällt, sofern die Bedingungen für den Grenzfall $\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \gg 1$ erfüllt sind. Die Welle wird dann fast vollständig reflektiert. Die Eindringtiefe ist in diesem Grenzfall sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge der einfallenden Welle (vgl. Tabelle S. 230). Ein Knoten des



Feldes \vec{E} und ein Bauch des Feldes \vec{B} liegen dann in der Oberfläche des leitenden Halbraumes. Die instantane Intensität S , verschwindet trivialerweise zu jeder Zeit in den Knoten von \vec{E} und \vec{B} , nicht aber daneben. Was daneben verschwindet, ist nur das Zeitmittel der Intensität, da

der Energiefluss in aufeinanderfolgenden Viertelsperioden entgegengesetzt gerichtet ist. Die neben-

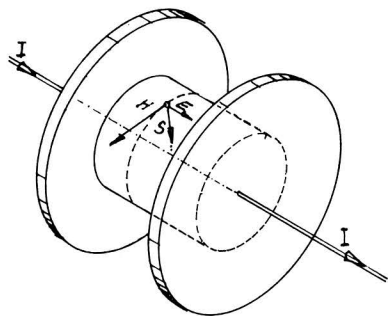


stehende Skizze zeigt die Energieflussrichtungen für zwei zeitlich aufeinanderfolgende Viertelsperioden. Die Energie pendelt hin und her zwischen elektrischer Feldenergie (die um die E-Bäuche herum konzentriert ist) und magnetischer Feldenergie (die um die B-Bäuche herum konzentriert ist).

Zur allgemeineren Bedeutung des Poynting'schen Vektors.

Der Poynting'sche Vektor stellt nicht nur im Falle von elektromagnetischen Wellen den Fluss elektromagnetischer Energie dar, sondern auch in stationären und quasistationären Situationen. Man kann dies leicht verifizieren an den folgenden Beispielen:

① Aufladen eines Kondensators:



Mit Hilfe des Poyntingvektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ kann man die Energie berechnen, die beim langsamen *) Aufladen in das skizzierte zylindrische Teilvolumen zwischen den Platten des Kondensators hineinfließt. Zwischen den Platten herrscht nicht nur ein elektrisches Feld \vec{E} , sondern während

des Aufladevorganges noch ein Feld \vec{H} , das durch die erste Maxwell'sche Gleichung gegeben ist. Für Vakuum ist nach S. 179 $\text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Aus Symmetriegründen ist beim skizzierten Kondensator \vec{H} tangential und \vec{S} nach innen auf die Kondensator-

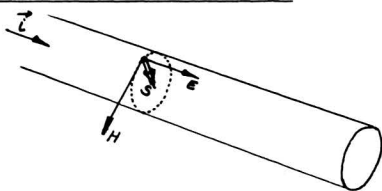
*) Die Aufladezeit soll gross sein im Vergleich zu c/d , wobei d von der Grössenordnung der Linearabmessungen des Kondensators ist.

achse zu gerichtet. Das Flächenintegral $\iint \vec{S} \cdot d\vec{f}$ über die Oberfläche des Kreiszylinders ist gleich der Abnahme pro Sekunde der Energie im Kreiszylinder. Nachdem der Strom aufgehört hat zu fließen, herrscht nun noch ein elektrisches Feld \vec{E} zwischen den Platten des Kondensators.

Die Rechnung zeigt, dass die Energie, die während dem Aufladen durch die Zylinderfläche hindurchgetreten ist, gleich gross ist wie die elektrische Feldenergie im Zylinder.

Das Wesentliche an dieser Betrachtung ist das folgende: Die Energie fliesst nicht durch die Leitungsdrähte in das Kondensatorvolumen hinein. Sie fliesst von aussen in den Raum zwischen den Kondensatorplatten. In den Leitern wird keine elektromagnetische Energie transportiert. Sie dienen nur zur Führung der Felder.

② Joule'sche Wärme.

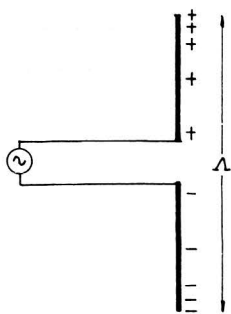


In einem Leiter von kreisförmigem Querschnitt und der Leitfähigkeit σ flüsse der konstante Strom \vec{I} . Der Poyntingvektor ist nach innen gerichtet und das Integral $\iint \vec{S} \cdot d\vec{f}$ über die Oberfläche des Leiters ist gleich der pro sec erzeugten Joule'schen Wärme.

10.5. Das Problem der Abstrahlung: Der Hertz'sche Dipol

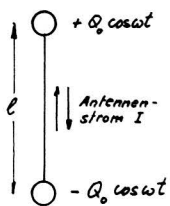
Heinrich Hertz 1857 - 1894: Entdecker der von Maxwell vorausgesagten elektromagnetischen Wellen (1888).

10.5.1. Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch einen oszillierenden elektrischen Dipol im Vakuum.



Zwei Metallstäbe sind in der skizzierten Weise über eine Doppelleitung an einen Wechselstromgenerator hoher Frequenz angeschlossen. Die kombinierte Länge Λ der Stäbe sei nicht grösser als die halbe Wellenlänge. In einer Halbperiode ist dann der eine Stab positiv und der andere negativ geladen, und in der folgenden Halbperiode ist es umgekehrt. Die Ladungsverteilung auf den Stäben

hat damit ein elektrisches Dipolmoment, das mit der Frequenz ω des Generators oszilliert. Die Oberflächenladungsdichte nimmt gegen die äusseren Enden zu, wie man mit Hilfe einer Glühlampe oder einer Fluoreszenzlampe leicht nachweisen kann. Die Stäbe stellen eine elektrische Dipolantenne dar. Sie strahlt elektromagnetische Wellen ab, wie man mit dem auf S. 223 beschriebenen Empfänger nachweisen kann.



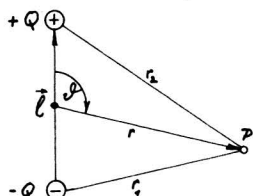
Um unwesentliche Komplikationen zu vermeiden, ersetzen wir die Dipolantenne mit ihrer kontinuierlichen Ladungsverteilung durch zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen $+Q_0 \cos \omega t$ und $-Q_0 \cos \omega t$ im festen Abstand l . Das elektrische Dipolmoment ist dann nach S. 50 gegeben durch $\vec{p} = \vec{l} Q_0 \cos \omega t = \vec{p}_0 \cos \omega t$. Die Oszillation des Dipolmomentes kommt dadurch zustande, dass der Generator dafür sorgt, dass Ladung vom einen Ende des Dipols zum anderen fließt und umgekehrt. Der Strom auf der Verbindungsstrecke der beiden Punktladungen, der Antennenstrom,

ist dann $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\dot{p}}{l}$

a. Eine Betrachtung, die zeigt, dass das Problem der Abstrahlung nicht ganz trivial ist.

Wir wollen einmal naiv sein und annehmen, dass man das Feld \vec{E} im Raume berechnen dürfe wie im Falle der Elektrostatik (d.h. auf Grund des Coulomb'schen Gesetzes) und das Feld \vec{B} als Feld eines quasistationären Stromes (d.h. mit der Formel von Laplace). Im Hinblick auf die Anwendungen der folgenden Betrachtungen in der Atomphysik rechnen wir in e.s.u.

Die Berechnung des Feldes \vec{E} nach der Elektrostatik.



Nach S. 20 ist das elektrostatische Potential in P

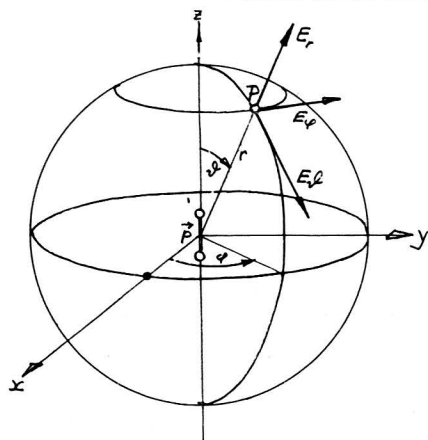
$$V = \frac{Q}{r_2} - \frac{Q}{r_1} = \frac{Q(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}$$

In der Approximation $l \ll r$ ist $r_1 - r_2 \approx l \cos \vartheta$ und $r_1 r_2 \approx r^2$, sodass

$V \approx \frac{Ql}{r^2} \cos \vartheta = \frac{p}{r^2} \cos \vartheta$. In Vektorschreibweise ist $p \cos \vartheta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r}$, wobei \vec{r} vom Zentrum des Dipols aus abgetragen ist. Damit wird

$V(\vec{r}) \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$. Durch Bildung des Gradienten erhält man das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \quad \text{in e.s.u.}$$



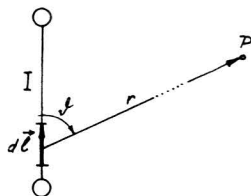
Der Symmetrie des Problems sind Polarkoordinaten angepasst:

$$E_r = \frac{3pr^2 \cos \vartheta - pr^2 \cos \vartheta}{r^5} = \frac{2p}{r^3} \cos \vartheta$$

$$E_\vartheta = \frac{0 + pr^2 \sin \vartheta}{r^5} = \frac{p}{r^3} \sin \vartheta$$

$E_\varphi = 0$ aus Symmetriegründen

die Berechnung des Feldes \vec{B} mit der Formel von Laplace.



Der Betrag des Stromfadenelementes $d\vec{l}$ zum Felde \vec{B} im Punkte P beträgt nach S. 109

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Wegen der Voraussetzung $l \ll r$ ist der Winkel φ annähernd derselbe für alle Stromfadenelemente zwischen den beiden Punktladungen, sodass

$\vec{B} \approx \frac{I}{c} \frac{\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$. Da \vec{B} senkrecht steht auf der Ebene, die von \vec{l} und \vec{r} aufgespannt wird, ist $B_r = 0$ und $B_\varphi = 0$, während

$$B_\varphi \approx \frac{I}{c} \cdot \frac{l r \sin \varphi}{r^3} = \frac{\dot{p}}{c r^2} \sin \varphi$$

Der Poynting'sche Vektor \vec{S} .

\vec{E} ist proportional zu $p = p_0 \cos \omega t$ und \vec{B} ($= \vec{H}$ für Vakuum in e.s.u.) proportional zu $\dot{p} = -\omega p_0 \sin \omega t$. Also ist der Poynting'sche Vektor \vec{S} proportional zu $\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$. Der zeitliche Mittelwert verschwindet, d.h. es findet gar keine Abstrahlung elektromagnetischer Energie statt nach dieser naiven Rechnung.

Als nächsten Schritt könnte man nun erwägen, die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Felder \vec{E} und \vec{B} zu berücksichtigen, indem man ωt ersetzt durch $\omega(t - \frac{r}{c})$. Das hilft aber nicht, da das Zeitmittel von $\sin 2\omega(t - \frac{r}{c})$ auch verschwindet.

b. Die richtige Lösung

Die Herleitung der richtigen Lösung sprengt den Rahmen dieser Vorlesung, und wir verweisen auf dem Zyklus der Vorlesungen über theoretische Physik. Man findet für $l \ll r$ in e.s.u.

$E_r = 2 \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) \cos \varphi$	$B_r = 0$	Nun der Dipol zeitlich variiert wie $p(t)$, sind p , \dot{p} und \ddot{p} zur Zeit $(t - \frac{r}{c})$ zu nehmen
$E_\varphi = \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{r c^2} \right) \sin \varphi$	$B_\varphi = 0$	
$E_\varphi = 0$	$B_\varphi = \left(\frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{r c^2} \right) \sin \varphi$	

Im S.I. kommt bei der Formel für \vec{E} der Faktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ und bei der Formel für \vec{B} der Faktor $\frac{c\mu_0}{4\pi}$ hinzu.

c. Diskussion der richtigen Lösung.

Die naive Rechnung lieferte nur das erste Glied. Die richtige Lösung enthält drei Sorten von Gliedern

$\frac{p}{r^3}$	$\frac{\dot{p}}{r^2 c}$	$\frac{\ddot{p}}{r c^2}$
\downarrow	\downarrow	\downarrow
$\text{Mit } p = p_0 \cos \omega t \text{ und } \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ werden die Amplituden dieser Glieder}$	$\frac{\omega p_0}{r^2 c} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{p_0}{r^2}$	$\frac{\omega^2 p_0}{r c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{p_0}{r}$
$\frac{p_0}{r^3}$	$\frac{\omega p_0}{r^2 c}$	$\frac{\omega^2 p_0}{r c^2}$
\downarrow	\downarrow	\downarrow
$\frac{p_0}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^3$	$2\pi \frac{p_0}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2$	$4\pi^2 \frac{p_0}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{r}\right)$

Diese Terme sind nur im Nahfeld der Antenne wesentlich. Für $r \gg \lambda$ können sie vernachlässigt werden.

Dieser Term dominiert für $r \gg \lambda$, in der sog. Wellenzone

Der Poynting'sche Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \left(\frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \right)$ im Vakuum) hat in Kugelkoordinaten folgende Komponenten

$$S_r = \frac{c}{4\pi} E_\theta B_\phi$$

$$S_\theta = -\frac{c}{4\pi} E_r B_\phi$$

$$S_\phi = 0$$

Das Zeitmittel von S_θ verschwindet offensichtlich für $p = p_0 \cos \omega t$; denn B_ϕ ist im wesentlichen die zeitliche Ableitung von E_r , d.h. wenn z.B. E_r wie $\sin(\omega t - \delta)$ variiert, variiert B_ϕ wie $\cos(\omega t - \delta)$ und das Produkt wie $\sin 2(\omega t - \delta)$.

Das Zeitmittel des Poynting'schen Vektors hat nur eine radiale Komponente, sowohl im Nahfeld, wie auch in der Wellenzone. Durch Einsetzen von $p = p_0 \cos \omega t$ überzeugt man sich leicht, dass

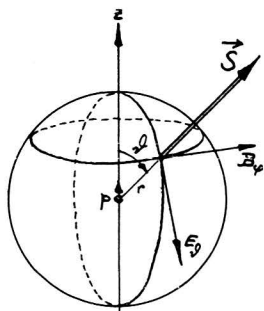
$$\overline{S_r} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{r c^2} \right)^2 \cdot \sin^2 \theta$$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Weglassen der Nahfeld-Terme: Zur Berechnung der Abstrahlung genügt es, die Wellenzone-Terme

zu betrachten. Das Strahlungsfeld (in a.s.u.) ist gegeben durch

$E_r = 0$	$B_r = 0$
$E_\vartheta = \frac{\ddot{p}}{rc^2} \sin\vartheta$	$B_\vartheta = 0$
$E_\varphi = 0$	$B_\varphi = \frac{\ddot{p}}{rc^2} \sin\vartheta$

um das Strahlungsfeld im Abstand r vom Dipol zur Zeit t zu erhalten, ist \ddot{p} zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ einzusetzen: Retardierung.



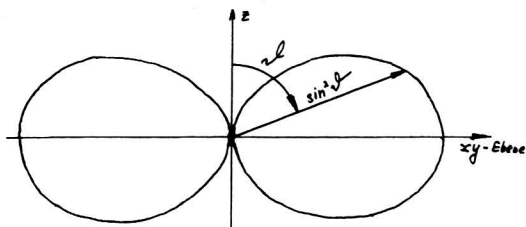
der Poynting'sche Vektor ist radial nach aussen gerichtet und hat den Betrag

$$S(\vartheta) = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{rc^2} \right)^2 \sin^2\vartheta$$

Die abgestrahlte Welle ist eine transversale Kugelwelle. Wie bei der ebenen elektromagnetischen Welle ist $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $\vec{E} \perp \vec{S}$, $\vec{B} \perp \vec{S}$, und $E = B$ (vgl. S. 233). Die In-

tensität ist proportional zu $\frac{1}{r^2}$; denn durch konzentrische Kugelflächen muss derselbe Energiefluss hindurchtreten.

Die Winkelabhängigkeit der Intensität ist im nebenstehenden Polar-
diagramm dargestellt. In der Äquatorebene ist die Intensität maximal, während in Richtung der Dipolachse z keine Abstrahlung erfolgt.

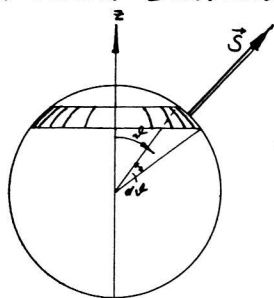


Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich durch Integration des Poyntingvektors über eine Kugelfläche, in deren Zentrum der Dipol liegt. Als Flächenelement

wählen wir die Kugelzone $d\vec{f} = 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta$. Es wird dann

$$N = \iint_{\text{Kugelfläche}} \vec{S} \cdot d\vec{f} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{rc^2} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3\vartheta 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta$$

$$= \frac{(\ddot{p})^2}{2c^3} \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta \rightarrow \boxed{N = \frac{2}{3} \frac{(\ddot{p})^2}{c^3}} \quad \text{in e.s.u.}$$



Von besonderer Bedeutung ist der harmonisch oszillierende Dipol: $p = p_0 \cos \omega t$, $(\ddot{p})^2 = \omega^4 p_0^2 \cos^2 \omega t$. Im Zeitmittel ist

$$\overline{N} = \frac{\omega^4 p_0^2}{3 c^3}$$

die abgestrahlte Leistung steigt mit der vierten Potenz der Frequenz.

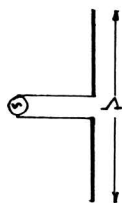
d. Der Strahlungswiderstand der elektrischen Dipolantenne.

Wir betrachten eine Antenne, die an einen Hochfrequenzgenerator angeschlossen ist. Da die abgestrahlte Leistung N im Zeitmittel nicht verschwindet, stellt die Antenne eine Impedanz dar, die einen Realteil R_s aufweist. Diesen Realteil wird Strahlungswiderstand genannt. Er lässt sich leicht berechnen durch Betrachtung der Leistung, die hineingesteckt wird:

In einem Ohm'schen Widerstand wird die Leistung $N = RI^2$ in Joule'sche Wärme umgewandelt. Ganz analog wird von einer Antenne die Leistung $N = R_s I^2$ in Form elektromagnetischer Wellen abgestrahlt, wobei I der Antennenstrom bedeutet (S. 244/245). Mit $I = I_0 \sin \omega t$ wird $\overline{N} = \frac{1}{2} R_s I_0^2$. Dies ist gleich dem Zeitmittel der abgestrahlten Leistung zu setzen:

$$\frac{1}{2} R_s I_0^2 = \frac{\omega^4 p_0^2}{3 c^3}, \text{ wobei } I_0 = -\frac{\omega p_0}{\ell}, \text{ also } \frac{1}{2} R_s \frac{\omega^4 p_0^2}{\ell^2} = \frac{\omega^4 p_0^2}{3 c^3},$$

$$\text{woraus } R_s = \frac{2}{3} \frac{\omega^2 \ell^2}{c^3}, \text{ oder mit } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad R_s = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad \text{in e.s.u.}$$

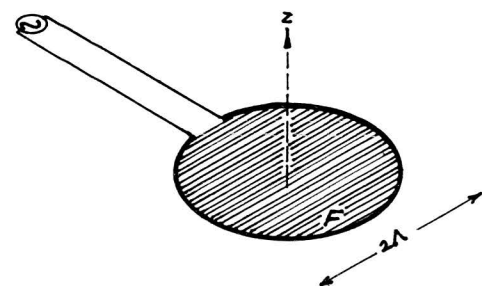


Die effektive Dipollänge ℓ ist im allgemeinen nicht gleich der Länge Λ der Antenne. Berücksichtigt man die tatsächliche Ladungsverteilung auf der elektrischen Dipolantenne bei $\Lambda = \lambda/2$, dann wird $\ell \approx 0.6 \Lambda$. Der

Strahlungswiderstand einer solchen Antenne ist (nach Umrechnung in das S.I.) rund 80 Ohm.

10.5.2. Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch einen oszillierenden magnetischen Dipol im Vakuum.

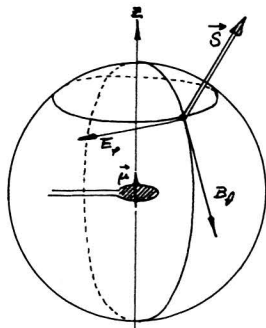
Ein oszillierender magnetischer Dipol ist leicht zu realisieren: Eine vom Strom I durchflossene Leiterschleife hat ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$, das nach S. 131 gegeben ist durch $\vec{\mu} = \frac{1}{c} I \vec{F}$ (e.s.u.), wobei \vec{F} die von der Schleife umschlossene Fläche bedeutet (S. 131). Schickt man einen Wechselstrom $I = I_0 \cos \omega t$ durch die Schleife, hat man einen oszillierenden, zur z -Achse parallelen Dipol $\mu = \frac{1}{c} I_0 F \cos \omega t$. Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass an jeder Stelle der Schleife derselbe Strom I fließe, d.h. dass die Zeit, die die Fel-



den brauchen, um sich über eine Strecke von der Grössenordnung des Durchmessers $2r$ der Schleife auszubreiten, klein sei gegen die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

der brauchen, um sich über eine Strecke von der Grössenordnung des Durchmessers $2r$ der Schleife auszubreiten, klein sei gegen die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Bezüglich Drehmoment und potentieller Energie verhält sich ein magnetischer Dipol analog wie ein elektrischer Dipol (S. 131). Die Vermutung ist deshalb naheliegend, dass auch ein zeitlich variabler magnetischer Dipol elektromagnetische Wellen abstrahlt. Einen viel stärkeren Hinweis gibt aber die Tatsache, dass die beiden Maxwell'schen Feldgleichungen für das Vakuum ineinander übergehen, wenn man \vec{B} durch \vec{E} und \vec{E} durch $-\vec{B}$ ersetzt (vgl. S. 177/178). Wir nehmen diesen Ersatz vor in den Gleichungen für das abgestrahlte Feld auf S. 245 und ersetzen auch \vec{p} durch $\vec{\mu}$:



$B_r = 0$	$E_r = 0$
$B_\theta = \frac{\ddot{\mu}}{r c^2} \sin \vartheta$	$E_\theta = 0$
$B_\varphi = 0$	$E_\varphi = -\frac{\ddot{\mu}}{r c^2} \sin \vartheta$

e.s.u.

Beachte, dass diese Vorzeichen tatsächlich einen nach aussen zeigenden Poynting-Vek.

tor ergeben. Die in den Raumwinkel Ω abgestrahlte Leistung ist

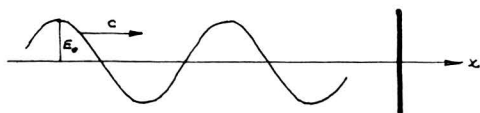
$$N = \frac{2}{3} \cdot \frac{(\ddot{\mu})^2}{c^3}, \text{ völlig analog zum elektrischen Dipol.}$$

Für den Strahlungswiderstand erhält man bei einer Kreisschleife vom Radius Λ

$$R_s = \frac{32\pi^6}{3c} \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right)^4$$

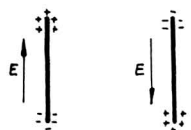
10.5.3. Die Streuung elektromagnetischer Wellen.

a. Leitende Körper als Sekundärstrahler



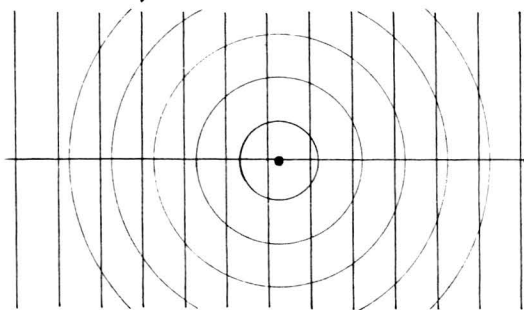
Als einfaches Beispiel betrachten wir einen leitenden Stab dessen Achse parallel

ist zum Felde \vec{E} einer ebenen elektromagnetischen Welle.



Durch Influenz wird der Stab zum oszillierenden elektrischen Dipol. Der Antennenstrom, der von den hin- und hergeschobenen Ladungen herrührt, ist leicht nachzuweisen, indem man den Stab

in zwei Hälften teilt und diese durch eine Glühlampe verbindet (vgl. S. 223). Der Stab wird also zum Sekundärstrahler.



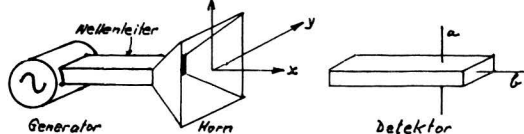
Die vom Stab emittierte Welle wird Streuwellen genannt.

Sie ist eine Kugelwelle mit der auf S. 244 dargestellten Winkelverteilung der Intensität.

Das Problem der Phasenbeziehung zwischen der

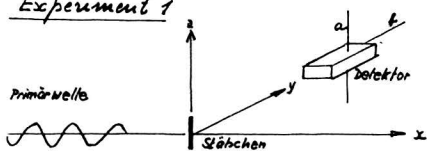
Primärwelle und der Streuwelle würde eine detailliertere Betrachtung erfordern: Der leitende Stab hat eine Selbstinduktion und eine Kapazität und stellt ein Schwingensystem dar, das in Folge der Abstrahlung verlustbehaftet ist.

Winkelabhängigkeit und Polarisation der Streuwelle lassen sich mit Mikrowellen ($\lambda = 3\text{cm}$) sehr einfach demonstrieren.



Aus dem Horn des Mikrowellensenders tritt eine annähernd ebene, seitlich begrenzte Welle. Sie pflanzt sich längs x fort, und der \vec{E} -Vektor ist parallel zu z . Der Detektor empfängt nur Wellen, die ungefähr längs seiner Längsachse b einfallen, und zwar spricht er nur auf die Komponente von \vec{E} längs seiner Achse a an.

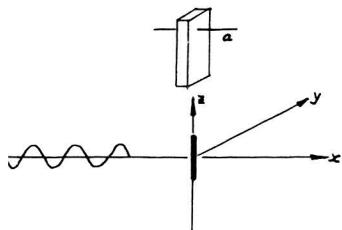
Experiment 1



In der Äquatorebene des Stäbchens beobachtet man eine intensive längs z polarisierte Streuwelle.

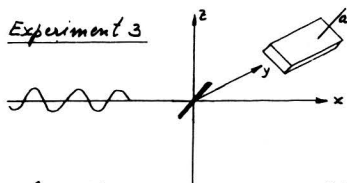
Stäbchen, deren Länge ungefähr $\lambda/2$ beträgt, streuen am stärksten.

Experiment 2



Längs der Achse des Stäbchens wird keine Streuwelle festgestellt, gleichgültig, ob $a \parallel x$ oder $a \parallel y$: Ein Dipol strahlt nicht längs seiner Achse.

Experiment 3



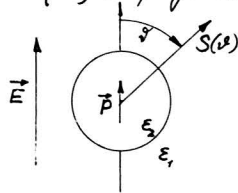
Das Stäbchen liegt schief in der xz -Ebene. Die längs y gesteuerte Welle ist parallel zur Stäbchenachse polarisiert.

b. Streuung an nichtleitenden Körpern.

Das elektrische Feld der einfallenden Welle kann in nichtleitenden Körpern eine dielektrische Polarisation erzeugen. Die Polarisationsladungen bilden einen oszillierenden Dipol. Der Antennenstrom ist in diesem Falle nicht ein Leitungsstrom sondern ein Polarisationsstrom (S. 91/92). Das elektrische Dipolmoment

ist umso grösser, je grösser die Dielektrizitätskonstante des Streukörpers ist. Die Streuung von Mikrowellen an einem Stäbchen aus BaTiO_3 ($\epsilon \approx 10^3$) ist viel intensiver als diejenige an einem gleich grossen Stäbchen aus Quarz ($\epsilon \approx 3.7$). (Demonstration).

Streuung von elektromagnetischen Wellen an nicht leitenden Teilchen findet auch dann statt, wenn diese in ein Dielektrikum mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten eingebettet sind. Ganz allgemein wird eine Welle beim Durchgang durch ein inhomogenes Dielektrikum gestreut. Betrachte als einfaches Modell Kugeln mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 , die in ein homogenes Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 eingebettet sind. Durch das Feld \vec{E} der Welle werden sowohl das Einbettungsmedium als auch die Kugeln polarisiert. Zur Vereinfachung der Betrachtung nehmen wir an, dass der Durchmesser der Kugeln kleiner sei als die halbe Wellenlänge, damit ein einfacher Dipol induziert wird, auf den die besprochenen Formeln für das abgestrahlte Feld anwendbar sind. Bei $\epsilon_2 < \epsilon_1$ wird die eingebettete Kugel stärker polarisiert als das Einbettungsmedium. Der resultierende induzierte Dipol zeigt in die Richtung des Feldes \vec{E} der einfallenden Welle. Bei $\epsilon_2 > \epsilon_1$ zeigt er in die umgekehrte Richtung. In beiden Fällen entsteht ein oszillierender Dipol und eine entsprechende Strennwelle (Für ein Einbettungsmedium, charakterisiert durch ϵ und μ , ist folgende Modifikation der Vakuumformeln vorzunehmen, damit die Bedingung $E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ von S. 233 erfüllt ist: $B_\phi = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{P}{rc^2} \sin^2 \varphi$). Die auf S. 245 gegebene Winkelabhängigkeit der Intensität ist unverändert.



Demonstrationsexperimente mit sichtbarem Licht:

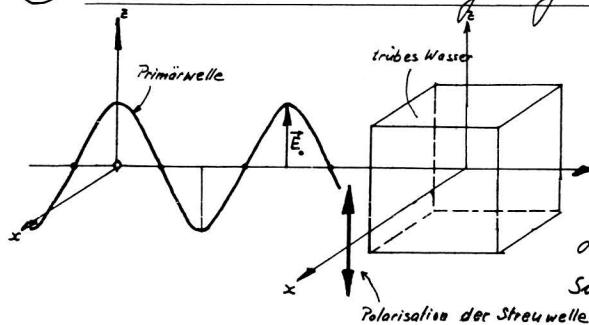
Licht wird gestreut an einer Suspension von Kolloidteilchen in Wasser. Wegen dem Faktor ω^4 wird blaues Licht stärker gestreut als rotes Licht: Bei einfallendem weissen Licht ist das Streulicht bläulich. Der Primärstrahl wird ärmer an blauem Licht, d.h. das durchgehende Licht erscheint

rötlich. Auf dieselbe Weise entsteht das Abendrot.

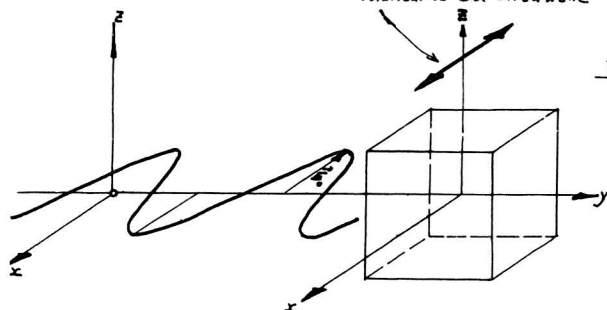
Experimente zur Polarisation des Streulichtes

Präparat: Myrthen-Tinktur in Wasser

① Polarisiertes Licht längs y einfallend



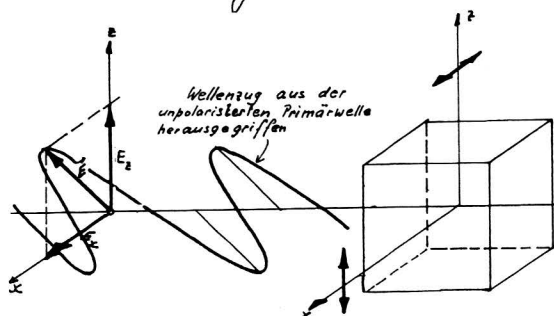
a) $\vec{E} \parallel z$: Längs x beobachtet man eine starke Streuwelle mit $\vec{E} \parallel z$.
Längs z wird kein Streulicht beobachtet, da die Dipole längs der Schwingungsachse nicht strahlen.



b) $\vec{E} \parallel x$ die Streuwelle längs x verschwindet, dafür wird längs z eine starke Streuwelle mit $\vec{E} \parallel x$ beobachtet.

② Unpolarisiertes Licht längs y einfallend.

Der einfallende Lichtstrahl besteht aus vielen einzelnen Wellenzügen, wobei alle Richtungen der \vec{E} -Vektoren, die in der xz -Ebene liegen, mit gleicher Häufigkeit vorkommen. (Längs y können keine Komponenten auftreten, da die elektromagnetischen Wellen transversal sind (S. 232).



Greift man irgend einen der Primärwellenzüge heraus, dann sieht man, dass die Komponente E_x Anlass gibt zu einer Streuwelle längs x mit $\vec{E} \parallel z$

und die Komponente E_x zu einer Streurwelle längs z mit $\vec{E} \parallel x$.

Beobachtet man das Streulicht in irgend einer Richtung senkrecht zur Einfallrichtung des Primärstrahls, dann findet man, dass es vollständig polarisiert ist.

Die Streuung von Licht an dielektrischen Inhomogenitäten wird Rayleigh-Streuung genannt (Lord Rayleigh 1842-1919).

Schwache Rayleigh-Streuung wird auch an reinem Wasser beobachtet. Sie rührt von Dichteschwankungen her, die durch die Bewegung der Wassermoleküle bedingt ist. Auch Gase zeigen Rayleigh-Streuung, da die Anzahl der Moleküle in einem Volumen der Grössenordnung $(\frac{\lambda}{2})^3$ (λ = Lichtwellenlänge) schon merklichen Schwankungen unterworfen ist aus rein statistischen Gründen. Die blaue Farbe des Himmels rührt davon her.

Eine interessante Frage: Es gibt keine homogenen materiellen Medien. Jedes Material besteht aus einzelnen Atomen, die polarisierbar sind (S. 49) und deshalb elektromagnetische Wellen streuen. Warum beobachtet man mit sichtbarem Licht nicht in jedem durchsichtigen Medium eine starke Rayleigh-Streuung? Der Leser suche die Antwort selber im Verlaufe des weiteren Studiums!

Nachwort.

Die klassische phänomenologische Elektrizitätslehre steckt in den fünf Gleichungen, die auf S. 180 zusammengefasst sind. Eine riesige Vielfalt von Erscheinungen lässt sich damit erklären. Die erste und die zweite Maxwell'sche Feldgleichung sind nicht durch eine Sequenz von vielen kleinen logischen Schritten der verwirrenden Vielfalt der experimentellen Tatsachen abgetrotzt worden. Sie sind eine Synthese, die nur durch eine unglaubliche Kreativität zustande kommen konnte. Im Menschen und auch in seinen exakten Wissenschaften steckt viel mehr als Logik. In neuerer Zeit scheint dies in Vergessenheit geraten zu sein, wie die folgende Fabel illustriert:

Ein Tausendfüßler kam vergnügt des Weges, seine tausend Beine eifrig bewegend nach einem geheimnisvollen, unalten Programm, das ihm die Natur mitgegeben hatte, dessen er sich aber nicht bewusst war. Da begegnete ihm eine Spinne. Sie stützte mit ihren acht Beinen gravitatisch und ernst einher; jeder Schritt war ihr bewusst. Da erblickte sie den Tausendfüßler und sprach: "O, Freund Tausendfüßler, wie bewundere ich dich! Du hast tausend Beine und kannst sie so bewegen, dass du tatsächlich vom Fleck kommst. Ich selber habe nur acht Beine und konnte ihre Bewegung erst richtig verstehen, nachdem ich einen Kurs über die Neue Mathematik absolviert hatte. Aber nun weiss ich, dass ich die Menge meiner Beine optimal bewege. Möchtest du nicht auch bewusst werden, wie du deine Beine bewegst?"

In seiner naturverbundenen Treuherrigkeit und Naivität erwiderte der Tausendfüßler: "O, Spinne, bring mir die Neue Mathematik bei. Vielleicht kann ich dann mit meinen tausend Beinen hundertfünfundzwanzig mal schneller laufen, als du mit deinen acht Beinen!"

Da setzte sich die Spinne zum Tausendfüßler hin und

klärte ihm auf über die Mengen seiner Vorderbeine, Mittelbeine, Hinterbeine, linken Beine, rechten Beine, deren Vereinigung und Durchschmitt. Als sie mit der Lektion zu Ende war, sprach sie: "Nun wollen wir sehen, wie schnell du laufen kannst."

Der Tausendfüßler war völlig gelähmt, und die Spinne konnte ihn in Ruhe auffressen:
